THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR-INGÉNIEUR

par

Michel VINCENT

1re THÈSE : Etude de l'amortissement des modes de flexion d'une poutre cantilever lors de dépassements locaux de la limite élastique.

2e THÈSE : Séparation thermique dans les fluides en rotation.

Soutenues le 17 mars 1966 devant la Commission d'Examen.

MM. MAZET Président.

SIESTRUNCK
COUPRY
} Examinateurs.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR-INGÉNIEUR

par

Michel VINCENT

1re THÈSE : **Etude de l'amortissement des modes de flexion d'une poutre cantilever lors de dépassements locaux de la limite élastique.**

2e THÈSE : **Séparation thermique dans les fluides en rotation.**

Soutenues le 17 mars 1966 devant la Commission d'Examen.

MM. MAZET — Président.

SIESTRUNCK, COUPRY — Examinateurs.

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PROFESSEURS

Doyen . . . . . M. ZAMANSKY

PRENANT	T Anatomie et histologie comparées.	FORTET	T Calcul des probabilités et physique mathématiques.
GRASSE	T Evolution des êtres organisés.	SCHWARTZ	T Calcul différentiel et intégral.
PREVOST	T Chimie organique.	CHOUARD	T Physiologie végétale.
WYART	T Minéralogie et cristollographie.	MALAVARD	T Aviation (technique aéronautique)
TEISSIER	T Zoologie.	BRELOT	T Analyse supérieure.
AUGER	T Physique quantique et relativité.	NORMANT	T Synthèse organique.
MONNIER	T Physiologie générale.	BENARD	T Chimie appliquée.
PIVETEAU	T Paléontologie.	DUGUE	T Statistique mathématique.
ROCARD	T Physique E.N.S.	SOULAIRAC	T Psychophysiologie.
CARTAN	T Mathématiques E.N.S.	ULRICH	T Physiologie végétale appliquée.
LAFFITTE	T Chimie générale.	KIRRMANN	T Théories chimiques.
N...	T Géométrie supérieure.	CHADEFAUD	T Botanique.
COULOMB	T Physique du globe.	Melle LE BRETON	T Physiologie de la nutrition.
Melle COUSIN	T Biologie animale S.P.C.N.	LELONG	T Application de l'analyse à la géométrie.
CHRETIEN	T Chimie minérale.	DEVILLERS	T Anatomie et histologie comparées.
BOCQUET	T Zoologie.	EHRESMANN	T Topologie algébrique.
KASTLER	T Physique E.N.S.	FRANÇON	T Physique S.P. C.N.
EPHRUSSI	T Génétique.	GLANGEAUD	T Géographie physique, géologie dynamique.
GAUTHERET	T Biologie végétale C. P.E.M.	DODEMENT	T Mathématiques M.G.P.
LUCAS R.	T Recherches physiques.	PISOT	T Technique mathématique de la physique.
THOMAS A.	T Biologie cellulaire.	ROCH	T Géologie.
MORAND	T Physique enseignement.	SCHATZMANN	T Astrophysique.
SOLEILLET	T Physique C. P. E.M.	TERMIER	T Géologie générale.
FORTIER	T Mécanique expérimentale des fluides.	ZAMANSKY	T Mathématiques générales.
DRACH	T Zoologie.	LENNUIER	T Physique M.G.P.
QUENEY	T Météorologie et dynamique de l'atmosphère.	ROUTHIER	T Géologie appliquée.
GALLIEN	T Embryologie.	Mme TONNELAT	T Physique théorique.
EICHHORN	T Botanique.	DIXMIER	T Mathématiques M.P.C.
DE CUGNAC	T Biologie végétale S.P.C.N.	SOUCHAY	T Chimie générale.
Melle CAUCHOIS	T Chimie physique.	AIGRAIN	T Electrotechnique.
THELLIER	T Physique du globe.	BRUSSET	T Chimie systématique.
PONCIN	T Mécanique générale.	LEVY	T Physique théorique des hautes énergies.
DUBREIL	T Arithmétique et théorie des nombres.	Mme CHAIX	T Chimie biologique.
QUELET	T Chimie organique.	Mme HUREL PY	T Biologie végétale C.P.E.M.
CAGNIARD	T Géophysique appliquée.	PANNETIER	T Chimie générale I
CHAMPETIER	T Chimie macromoléculaire.	BRUN	T Mécanique des fluides I
CUVILLIER	T Micropaléontologie.	Mme DUBREIL	T Mathématiques (Agrégation)
JUNG	T Géologie.	Mme LELONG	T Mathématiques II E.N.S.
TRILLAT	T Microscopie et diffraction électronique.	BELLAIR	T Géologie S.P.C.N.
WIEMANN	T Chimie organique et structurale.	COTTE	T Physique électricité.
VASSY	T Physique de l'atmosphère.	DUBOIS J.E.	T Chimie organique physique.
DESTOUCHES	T Théorie physique.	LAMOTTE	T Zoologie E.N.S.
AMIEL	T Chimie générale.	OLMER	T Energétique générale.
HOCART	T Minérallogie et cristallographie.	GAUTHIER	T Mécanique appliquée.
J.P. MATHIEU	T Physique optique.	BARCHEWITZ	T Chimie physique.
COUTEAUX	T Cytologie.	BROSSEL	T Physique atomique.
CHOQUET	T Théorie des fonctions et topologie.	BUSER	T Physiologie comparée.
FELDMANN	T Biologie végétale marine.	CAMUS	T Physiologie végétale.
JOST	T Physiologie comparée.		

....

CURIEN	T	Minéralogie et cristallographie.
POSSOMPES	T	Zoologie.
PULLMANN	T	Chimie quantique.
TEILLAC	T	Physique nucléaire et radio-activité.
VILLE	T	Econométrie.
WILLEMART	T	Chimie C.P.E.M.
FREYMANN	T	Recherches physiques.
ROLLET	T	Chimie minérale.
Melle JOSIEN	T	Chimie S.P.C.N.
CHEVALLEY	T	Géométrie algébrique et théorie des groupes.
GERMAIN	T	Mécanique théorique des fluides.
LUCAS G.	T	Géologie.
ALLARD	T	Chimie physique.
BERTHELOT	T	Physique des particules fondamentales.
BRICARD	T	Météorologie.
Mme ALBE-FESSARD	T	Psycho-physiologie.
M. JULIA	T	Etude des molécules naturelles complexes.
MAGAT	T	Physico-chimie des rayonnements.
Melle QUINTIN	T	Electrochimie.
MONOD	T	Chimie du métabolisme.
DE POSSEL	T	Analyse numérique.
CHARLOT	T	Chimie analytique.
CHATELET	T	Chimie C.P.E.M.
MATTLER	T	Physique S.P.C.N.
BOUISSIERES	T	Radiochimie.
Mme COUTURE	T	Thermodynamique et mécanique physique.
FRANC	T	Biologie animale C.P.E.M.
SCHNELL	T	Botanique tropicale.
STOLKOWSKI	T	Physiologie générale.
ACHER	T	Chimie biologique.
BAUDOIN	T	Biologie animale C.P.E.M.
BEAUMONT		Biologie animale S.P.C.N.
BLAMONT		Géophysique ionosphère.
BOUREAU	T	Botanique.
CURIE D.		Physique M.G.P.
DURAND DELGA	T	Géologie.
HELLER	T	Physiologie végétale.
TORTRAT	T	Calcul des probabilités.
CAILLEUX	T	Géologie S.P.C.N.
MAGNAN		Physique électricité.
DAUDEL	T	Mécanique ondulatoire.
Melle FOURCROY		Biologie végétale S.P.C.N.
Mme CHOQUET BRUHAT		Mécanique analytique et mécanique céleste.
Melle VEIL	T	Physiologie générale.
LWOFF	T	Microbiologie.
SIESTRUNCK	T	Mécanique physique et expérim.
CABANNES	T	Mécanique générale.
CAIRE	T	Géographie physique et géologie dynamique.
COMOLET		Mécanique des fluides.
DELLOUE	T	Physique de l'exosphère.
HOUILLON		Biologie animale C.P.E.M.
OLIVIER		Anthropologie.
SAMUEL	T	Mathématiques (ENS Jeunes filles)
THIRY	T	Mécanique céleste.
ABELES	T	Physique S.P.C.N.
AMAT	T	Thermodynamique.
AUBOIN	T	Géologie.
Mme BENOIT-GUEUTAL	T	Physique nucléaire et radio-activité.
BOUGIS		Biologie végétale marine Villefranche s/Mer
RIGAUDY	T	Chimie S.P.C.N.
COLLONGUES		Chimie C.P.E.M.
DUBERT		Biochimie.
NOZIERES		Physique générale.
CADIOT		Chimie organique.
IVANOFF		Océanographie physique.
FRANÇOIS		Zoologie.
TALBOT		Génie chimique.
Mme NOUGAREDE		Botanique.
BRUHAT	T	Mathématique M.P.C.
FOURNET		Electricité générale.
DEHEUVELS	T	Mathématiques propédeutique.
FURON	T	Géologie S.P.C.N.
Mme GANS	T	Génétique.
GENEVES		Biologie végétale C.P.E.M.
HUPE	T	Pétrographie.
HOLLANDE	T	Biologie générale.
LIONS	T	Analyse numérique.
MAITTE	T	Chimie organique.
NICOLAS		Géologie appliquée.
PANIGEL		Biologie générale.
RAVIER	T	Pétrographie.
MOREL F.	T	Physiologie comparée.
ROSEAU	T	Mécanique théorique des fluides.
ROUBINE		Electronique E.S.E.
SILBER	T	Chimie C.P.E.M.
UEBERSFELD	T	Electronique.
	T	Théories physiques.
HERVE	T	Mathématiques.
Mme PECKER-WIMEL	T	Astrophysique.
BALKANSKI		Physique M.P.C.
LE CORRE	T	Electricité.
NATAF	T	Physique nucléaire et radio-activité.
ECHALIER		Biologie animale C.P.E.M.
BARRAUD	T	Physique C.P.E.M.
DARS		Géologie structurale et appliquée.
CAMEFORT	T	Botanique (agrégation).
VICHNIEWSKY	T	Mécanique industrielle.
SIGWALT	T	Chimie S.P.C.N.
BLAQUIERE		Electronique.
BARUCH		Physique propédeutique.
ARNOUS	T	Physique théorique.
SLONIMSKI		Génétique.
MALLIAVIN	T	Mathématiques propédeutique.
GAUDEMAR		Chimie propédeutique.
BROUSSE	T	Mécanique théorique.
ROSCH	T	Astronomie.
GUY	T	Physique expérimentale.
LAZARD		Mathématiques M.P.C.
MOREL P.		Physique M.P.C.
ARSAC		Programmation.
LEFEBVRE		Chimie M.P.C.
BOK		Physique propédeutique.
CHAPEVILLE		Biochimie.
BENOIT		Physique C.P.E.M.
RIO		Chimie C.P.E.M.
JAUZEIN		Géologie E.N.S.
PREVOST G.		Biologie végétale C.P.E.M.

....

FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ D'ORSAY

PROFESSEURS

MANGENOT G.	T	Biologie végétale.
JACQUINOT P.	T	Optique.
GUINIER A.	T	Electricité et physique des solides.
GRIVET P.	T	Electronique.
BLANC-LAPIERRE A.	T	Accélérateur linéaire.
L'HERITIER P.	T	Génétique des virus.
LEMEE G.	T	Ecologie végétale.
MOYSE A.	T	Physiologie végétale.
DODE M.	T	Chimie thermodynamique.
DENY J.	T	Mathématiques.
RIVIERE A.	T	Géologie générale et sédimentologie.
MICHEL A.	T	Chimie minérale.
MAY R.	T	Anatomie comparée.
DELANGE H.	T	Mathématiques.
CHAPELLE J.	T	Physique expérimentale.
LACOMBE P.	T	Métallurgie.
BENOIT P.	T	Physiologie générale.
GUINOCHET J.	T	Biologie végétale S.P.C.N.
NERON A.	T	Mathématiques.
NOZERAN R.	T	Botanique approfondie.
CASTAING R.	T	Thermodynamique.
ELLENBERGER F.	T	Géologie structurale.
LEDERER E.	T	Chimie biologique.
RIZET J.	T	Génétique.
LENDER T.	T	Biologie animale S.P.C.N.
POITOU G.	T	Mathématiques.
FREON P.	T	Chimie organique.
TONNELAT	T	Biologie physico-chimique.
BRUNN Jan	T	Géologie historique.
JEAN M.	T	Physique nucléaire.
BERGERARD J.	T	Zoologie.
ROGER J.	T	Paléontologie.
LEFORT M.	T	Chimie nucléaire.
LAGARRIGUE A.	T	Physique des hautes énergies.
JULLIEN J.	T	Chimie structurale organique.
ARNULF A.	T	Optique.
ROUAULT M.	T	Diffraction électronique.
MARECHAL A.	T	Optique théorique et appliquée.
MAZET R.	T	Mécanique générale.
DAVID Serge	T	Chimie agrégation.
GUERIN H.	T	Chimie des gaz et des combustibles.
LESIEUR L.	T	Mathématiques M.P.C. et algèbre.
KOURGANOFF	T	Astronomie.
ARNOULT P.	T	Physique électronique.
KAHANE J.P.	T	Mathématiques.
BROCHARD J.	T	Physique propédeutique.
Mme ROIZEN	T	Physique C.P.E.M.
BERTEIN F.	T	Electronique.
MALGRANGE B.	T	Mathématiques.
CORABOEUF E.	T	Physiologie animale.
FRIEDEL J.	T	Physique des solides.
CHEVAUGEON J.	T	Cryptogamie.
MEYER P.	T	Physique théorique et atomique.
LEHMANN P.	T	Accélérateur linéaire.
CHABBAL R.	T	Physique propédeutique.
DELCROIX J.M.	T	Physique des plasmas.
CERF J.	T	Mathématiques.
D'ESPAGNAT B.	T	Physique théorique.
SCHAEFFER P.	T	Microbiologie.
DE GENNES P.	T	Physique des solides.
Mme MARTY N.		Physique propédeutique.
GOURDIN M.		Physique théorique.
PEREZ-Y-JORBA		Physique propédeutique.
GORENFLOT E.		Biologie végétale S.P.C.N.
RIOU M.		Physique nucléaire.
BROUSSE R.		Géologie S.P.C.N.
LIORET C.		Physiologie végétale.
CLAUSER H.		Chimie biologique.
JANCOVICI B.		Physique atomique.
LURCAT J.		Physique propédeutique.
LE BERRE J.		Entomologie.
LAVOREL J.		Biophysique.
PERIO P.		Physique propédeutique.
FETIZON M.		Stéréochimie.
CHEMLA M.		Chimie des isotopes.
MAZIERES C.		Chimie S.P.C.N.
VILKAS M.		Chimie C.P.E.M.
BLANDIN A.		Physique des solides.
BRUN G.		Génétique.
MERCOUROFF		Physique agrégation.
ANDRE J.		Microscopie électronique.
CHEVALLIER F.		Physiologie animale.
Melle MARCOU		Biologie cellulaire C.P.E.M.
BOURDU R.		Physiologie végétale.
BERKALOFF A.		Biologie animale C.P.E.M.
Melle LEFORT M.		Biologie cellulaire C.P.E.M.
Mme LAMBERT		Physique C.P.E.M.
BIZOT J.C.		Physique M.P.C.
GUIRAUD J.P.		Mécanique.
LABOUESSE B.		Chimie S.P.C.N.

FAVARD P.		Biologie animale C.P.E.M.
Mme CHARNIAUX-COTTON		Evolution des êtres organisés.
Melle FICINI		Chimie C.P.E.M.
LEQUEUX		Astronomie.
COHEN TANNOUDJI		Physique atomique.
TAVERNIER		Physique C.P.E.M.
DURAND Michel		Biologie animale S.P.C.N.
PASCAUD		Physiologie.
Mme PETIT		Biologie animale C.P.E.M.
CAGNAC		Physique agrégation.
FALK-VAIRANT		Physique nucléaire.
KRASNER	T	Mathématiques.
BENZECRI	T	Statistiques.
VINH MAU		Physique M.G.P.
DUQUESNES		Physique C.P.E.M.
SCHUTZENBERGER		Programmation.
TREMILLON		Chimie M.P.C.
FAYARD		Chimie M.P.C.
BUVET		Chimie C.P.E.M.
AUTHIER		Physique M.P.C.
PICINBONO	T	Physique C.P.E.M.
BONNEFILLE		Electrotechnique.
Mme PUISEUX DAO		Biologie végétale.

Secrétaire Général . . . . . R. POULLAIN

A V A N T P R O P O S

L'Office National d'Etudes et Recherches Aérospatiales m'ayant offert la possibilité de développer et mener à bien le présent travail, je tiens à remercier tout particulièrement certaines personnes parmi les membres de la section "Résistance des Structures" à laquelle j'étais affecté.

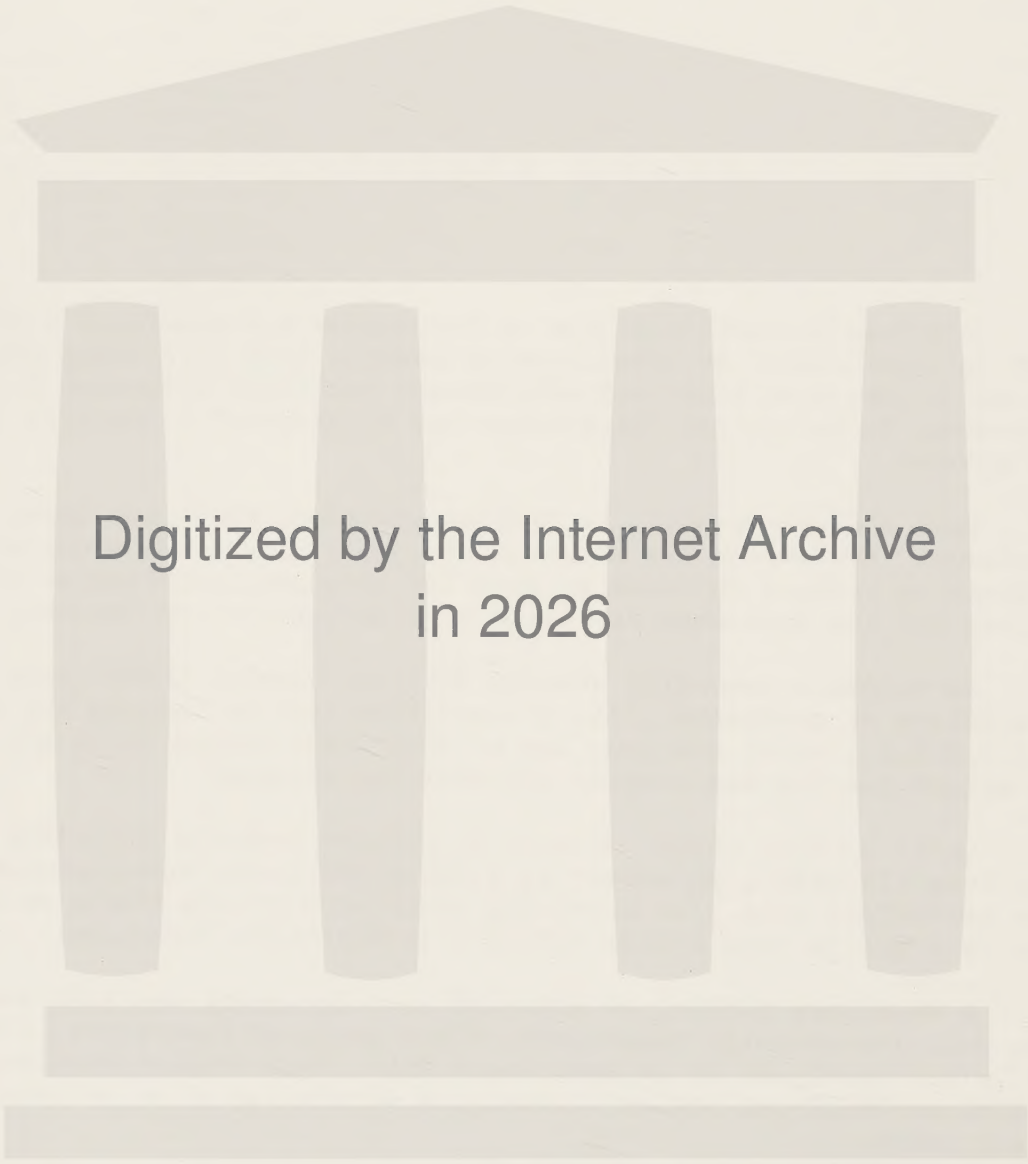
Tout d'abord Monsieur le Professeur Robert MAZET dirigeant le département "Résistance des Structures", qui a bien voulu accepter de parrainer ce travail de thése et dont les ouvrages, conférences et discussions sur les problèmes de fluage et plasticité m'ont beaucoup aidé.

Je voudrais remercier ensuite Monsieur Gabriel COUPRY pour l'aide bénéfique et constante qu'il m'a apportée tout au long de mon stage à l'O.N.E.R.A., ainsi que pour les si nombreuses heures qu'il m'a accordées malgré les lourdes charges qui sont les siennes.

Qu'il me soit permis ensuite d'exprimer toute ma gratitude à Monsieur Yves PIRONNEAU, Directeur de l'Ecole Nationale Supérieure de Mécanique de NANTES, dont j'ai suivi les cours lors de mes études en cette Ecole et à qui je dois d'être initié à la Mécanique Théorique.

A Messieurs GOURBIL et BOURGINE vont également mes vifs remerciements pour les conseils techniques, d'une part, et théoriques, d'autre part, qu'il m'ont prodigués de si nombreuses fois. Sans oublier Messieurs BONNEAU, LEMAITRE et VALID qui ont eu l'amabilité de m'aider et de me donner un peu de leur temps.

Je voudrais enfin dire à Monsieur SAGOT combien je lui suis reconnaissant pour l'aide technique avisée et dévouée qu'il m'a apportée constamment pendant près de cinq mois dans la réalisation expérimentale de ce travail, et ne pas omettre, en ce domaine, les services qui m'ont été rendus par les bureaux de dessin et de calcul, ainsi que par l'atelier de la section O.R. de l'O.N.E.R.A.


Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544317_0052

E R R A T A

Page 5	-	Ligne 10 : lire F à la place de f
Page 10	-	ν désigne le coefficient de Poisson
Pages 29 et 30	-	T désigne une période
Page 50	-	Lignes 20 et 22 : T_o désigne une période de résonance.

T A B L E D E S M A T I E R E S

NOTATIONS. 4

INTRODUCTION. 6

Chapître I - ETUDE GENERALE. 8

I,1. Approximations et hypothèses 8
I,2. Contrainte en un point de la poutre 10
I,3. Moment des forces intérieures 11
I,4. Energie dissipée par cycle de déformation : ΔW 12
I,5. Capacité d'énergie cyclique : W 13
I,6. Coefficient d'amortissement visqueux équivalent 13

Chapître II - EQUATIONS DE LAGRANGE POUR UNE POUTRE AMINCIE AU VOISINAGE DE L'ENCASTREMENT. 14

II,1. Cas où la partie non réduite de la poutre est rigide. 15
II,1.1. Expression analytique de la déformée 15
II,1.2. Calcul de l'énergie cinétique 16
II,1.3. Calcul des travaux virtuels 17
II,1.4. Equations de Lagrange 18
II,2. Cas général où la partie non amincie est susceptible de déformations élastiques 18
II,2.1. Expression analytique de la déformée 19
II,2.2. Calcul de l'énergie cinétique 20
II,2.3. Calcul des travaux virtuels 21
II,2.4. Equations de Lagrange 21

Chapître III - CYCLES ET LOIS DE COMPORTEMENT 23

III,1. Notion de cycles 23
III,2. Modèles mécaniques de fibres dans le cas élastique parfaitement plastique 27
III,2.1. Le modèle simplifié 27
III,2.2. Le modèle de Bingham-Hoff 28
III,3. Justification de l'hypothèse $\dot{\varepsilon} \simeq \dot{\varepsilon}_p$ 28
III,4. Equivalence des deux modèles 30

Chapître IV - CAS D'UN MATERIAU POUR LEQUEL ON PEUT NEGLIGER L'INFLUENCE DES VITESSES DE DEFORMATION 32

IV,1. Cas du solide élastique parfaitement plastique 33
IV,1.1. Calcul de l'énergie dissipée par cycle: ΔW 34
IV,1.2. Calcul de l'énergie cinétique 37
IV,1.3. Calcul du coefficient d'amortissement visqueux équivalent 37
IV,2. Résolution du problème dans le cas ou la loi de comportement ne dépend pas de la vitesse d'allongement 37
IV,2.1. Notion de fibres : microscopique et macroscopique 37
IV,2.2. Connaissance de la fonction Φ' et de ses intégrales 38
IV,2.3. Calcul de l'énergie dissipée par cycle ΔW 40
IV,2.4. Calcul de l'énergie cinétique 40
IV,2.5. Calcul du coefficient d'amortissement visqueux équivalent 41

Chapître V - COMPARAISON ENTRE PREVISION ET MESURE DE L'AMORTISSEMENT DU PREMIER MODE EN FLEXION D'UNE POUTRE CANTILEVER 42

V,1. Matériel d'essais 43
V,1.1. Eprouvette d'essai 43
V,1.2. Appareils de lecture pour les essais statiques 43
V,1.3. Application de la charge pour les essais statiques 44
V,1.4. Appareil d'excitation pour les essais dynamiques 44
V,1.5. Appareils de détection pour les essais dynamiques 44
V,1.6. Appareils de lecture 44
V,2. Détermination de la courbe d'écrouissage 44
V,3. Essais statiques 45
V,3.1. But 45
V,3.2. Dispositif expérimental 45
V,3.3. Dépouillement des résultats 46
V,3.4. Observations 48
V,4. Essais dynamiques 48
V,4.1. But 48
V,4.2. Dispositif expérimental 48
V,4.3. Dépouillement des résultats 49
V,5. Résultats expérimentaux 52
V,5.1. Essais statiques 52
V,5.2. Essais dynamiques 52
V,6. Remarques sur les résultats 54

CONCLUSION 55

BIBLIOGRAPHIE 56

RESUME

Rechercher une méthode de prévision de l'amortissement apparent des modes de flexion d'une poutre cantilever pour des vibrations symétriques au cours desquelles la limite élastique est dépassée en certains points de la structure est un problème complexe nécessitant certaines hypothèses simplificatrices. Dans un cas très général, les équations différentielles de la poutre sont écrites en utilisant une loi de comportement dépendant de la déformation et de la vitesse de déformation. Une localisation du fluage dans une partie précise de la structure par amincissement sur une faible longueur au voisinage de l'encastrement permet d'écrire les équations de LAGRANGE. Après analyse et explicitation de la notion de cycle à partir de deux modèles classiques relatifs d'une fibre microscopique et en négligeant l'influence de la vitesse de déformation un calcul complet d'amortissement du premier mode de flexion est effectué pour un matériau à comportement élastique parfaitement plastique. Des expériences statiques, puis dynamiques donnent des résultats comparés aux résultats théoriques.

THE DAMPING OF THE BENDING MODES OF A CANTILEVER BEAM FOR SMALL LOCAL OVERSHOOTINGS OF THE ELASTIC YIELD POINT

SUMMARY

The determination of a damping prediction method of the bending modes of a cantilever beam for symmetrical vibrations for which the elastic yield point has been exceeded in certain parts of the structure is a difficult problem needing some symplifying hypotheses. In a more general case the differential equations of the beam are written with a behaviour law depending on the deformation and the speed of deformation. A localization of creep in a precise place of the structure obtained by thinning it in the neighbourhood of the root of the built-in beam, enables us to write the equations of LAGRANGE. Following an analysis and an explanation of the cycle notion from two conventional representative models of a microscopic fiber, and neglecting the effect of the speed of deformation, a complete calculation of damping for the first bending mode is done for a material presenting an elastic, perfectly plastic behaviour. Firstly static, and then dynamic experiments, give results which are compared to theoretical results.

N O T A T I O N S

ℓ : Largeur de la tranche fluante de la poutre.

L : Longueur totale de la poutre.

ΔL : Abscisse de la section limitant la tranche fluante.

h : Demi hauteur de la poutre.

M : Masse de la partie non réduite de la poutre.

μ : Masse généralisée de la poutre.

E : Module d'Young du matériau constituant la poutre.

ε_A : Allongement relatif de limite élastique pour le matériau utilisé.

ε_e : Allongement relatif élastique.

ε_p : Allongement relatif plastique.

ε : Allongement relatif total.

ε_{M_i} : Allongement relatif correspondant au palier en contrainte de la microfibre "i".

ε_i : Allongement relatif total de la microfibre "i".

$\dot{\varepsilon}_i$: Vitesse d'allongement relatif.

A : Allongement relatif maximum pour un cycle symétrique décrit par une fibre.

q_2 : Rotation d'une section de la poutre.

a : Demi amplitude de rotation de cette section.

$\dot{q}_2$: Vitesse de rotation.

σ_i : Contrainte dans une fibre microscopique.

$\bar{\sigma}$: Contrainte moyenne dans une fibre macroscopique.

$\mathcal{M}$: Moment des forces intérieures sur une section.

ΔW : Energie dissipée par cycle.

W : Capacité d'énergie cyclique.

T : Energie cinétique.

$\grave{V}$: Coefficient d'amortissement visqueux équivalent.

ω_0 : Pulsation propre.

f : Force dynamique appliquée en bout de poutre.

P_m : Puissance moyenne.

Θ' : Fonction de densité de probabilité de seuils de fluage.

Θ, Θ_1, Θ_2, Θ_3 : Fonctions intégrales de la fonction Θ'

I N T R O D U C T I O N

L'objet de cette thèse est d'exposer une méthode de prévision de l'amortissement apparent des modes de flexion d'une poutre cantilever pour des vibrations symétriques au cours desquelles la limite élastique est peu dépassée aux points les plus exposés de la structure.

Tel qu'il est posé, le problème est d'une extrême complexité et la recherche d'hypothèses simplificatrices est indispensable. C'est ainsi qu'une hypothèse séduisante consistant à considérer que la dissipation d'énergie provient essentiellement de l'écrouissage permettrait de tirer d'un essai quasi-statique classique sur éprouvette toutes les informations nécessaires à un calcul simple de l'amortissement en vibrations de la poutre. C'est à la vérification de cette hypothèse qu'a été consacrée la plus grande partie du travail présenté ici.

Dans le premier chapitre, le problème de la prévision de l'amortissement des modes d'une poutre dépassant symétriquement à chaque oscillation le domaine élastique est traité sous son aspect le plus large. L'hypothèse de conservation de la ligne neutre et des sections droites est admise, la vitesse de déformation plastique est confondue avec la vitesse de déformation globale. La loi "contrainte-déformation" de traction étant supposée fonction, non seulement de la déformation, mais de la vitesse de déformation, le moment fléchissant peut, à chaque instant, être calculé pour chaque section de la poutre. On en déduit alors aisément l'énergie dissipée et l'amortissement équivalent du mode.

Le second chapitre est consacré au problème simplifié de la mise en équation des vibrations d'une poutre dont la section voisine de l'encastrement a été, sur une faible longueur, volontairement amincie. Le fluage est dans ce cas supposé localisé dans cette tranche. Dans un premier paragraphe, la partie non amincie de la poutre est supposée parfaitement rigide, et un seul paramètre généralisé suffit pour représenter son évolution. Dans le second paragraphe une méthode de RAYLEIGH-RITZ, fondée sur une forme approchée de flexion de la partie élastique, permet d'écrire les équations de LAGRANGE du problème en fonction de deux paramètres généralisés.

Jusqu'à maintenant, les lois contraintes-déformations avaient été supposées connues pour un cycle. Dans le chapitre III la notion de cycle est analysée, d'abord sous son aspect le plus général, ensuite explicitée pour une fibre microscopique à partir de deux modèles classiques. A cette occasion est précisée l'hypothèse suivant laquelle la vitesse de déformation plastique peut être confondue avec la vitesse de déformation globale.

Le quatrième chapître est consacré à l'explicitation complète de l'amortissement du premier mode de flexion d'une poutre amincie à l'encastrement, en admettant que l'énergie dissipée pour chaque cycle de vibration dépend essentiellement de l'irréversibilité des courbes d'écrouissage, la vitesse de déformation n'ayant qu'un rôle secondaire qui peut être négligé. Le calcul est effectué jusqu'au bout en admettant que le matériau a le comportement d'un solide élastique parfaitement plastique.

Le cinquième chapître est consacré à la vérification expérimentale de l'hypothèse suivant laquelle l'effet de la vitesse de déformation peut être négligé. Les essais ont été menés sur une poutre amincie à l'encastrement et construite dans un acier dont la loi d'écrouissage était, pour les amplitudes qui nous intéressaient, celle d'un matériau élastique parfaitement plastique. Le matériau a été caractérisé par des essais quasi-statiques de traction sur éprouvette. La loi d'écrouissage ainsi déterminée a été utilisée à la prévision de l'énergie dissipée par cycle. Des essais quasi-statiques ont d'abord été effectués sur la poutre, ils ont permis de vérifier que l'énergie dissipée dans les cycles quasi-statiques était bien celle prévue par la théorie. Des mesures de l'amortissement du premier mode de la poutre, à une fréquence voisine de 50 cycles par seconde, ont montré que cet amortissement correspondait à la dissipation d'énergie prévue à partir de la courbe d'écrouissage.

Il semble par conséquent acquis que, tout au moins à température normale, l'énergie dissipée en vibrations sur une poutre vibrant en dépassant symétriquement la limite élastique en ses points les plus exposés peut être prévue avec une bonne précision, en négligeant la vitesse de déformation, grâce aux seuls renseignements fournis par la courbe d'écrouissage statique.

Ce résultat, nous l'espérons, pourra être généralisé à des structures plus complexes que les poutres.

Chapitre I - E T U D E G E N E R A L E

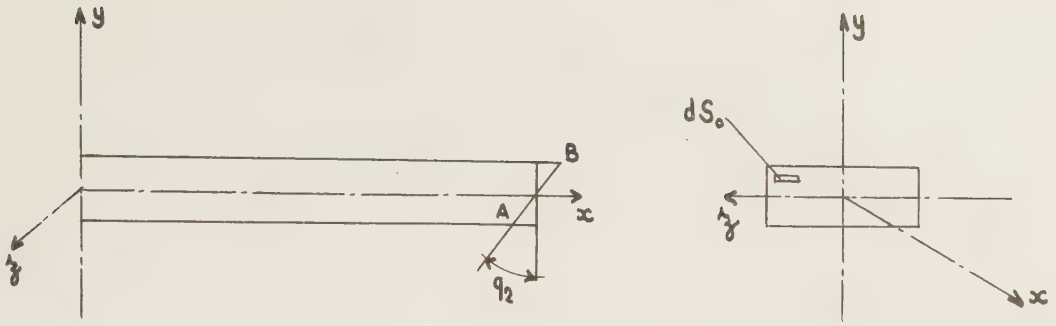
Le but que nous nous proposons est la prévision de l'amortissement des modes de flexion d'une poutre cantilever dont certaines parties dépassent symétriquement la limite élastique au cours des vibrations. Il semble utile (avant d'aborder l'étude de l'hypothèse simplificatrice suivant laquelle la vitesse de déformation peut être négligée) d'écrire complétement les équations différentielles d'une telle poutre, en admettant connue une loi de comportement dépendant simultanément de la déformation et de la vitesse de déformation.

En un point quelconque de la structure il est supposé possible de déterminer l'expression de la contrainte en fonction de la déformation unitaire et de la vitesse de déformation. Pour chaque section de la poutre le moment de flexion peut, en admettant l'hypothèse de KIRCHHOFF-LOVE, être calculé. La notion de décharge élastique permet ensuite le calcul de l'énergie dissipée par cycle de déformation. Connaissant la capacité d'énergie cyclique il devient ainsi possible de déterminer la valeur du coefficient d'amortissement visqueux équivalent de la structure.

Avant d'exprimer les grandes lignes du développement des calculs ultérieurs il est nécessaire d'exposer certaines approximations et hypothèses qui seront utiles pour le développement du travail.

I,1. APPROXIMATIONS ET HYPOTHESES

a - Il a été vérifié expérimentalement que la section droite d'une poutre en flexion se déforme pour adopter un contour trapézoïdal en cours de sollicitation. Disposant d'une poutre de faible section dont la hauteur est petite par rapport aux autres dimensions il ne sera pas commis une grande erreur (dans le cas de petites déformations dépassant peu la limite élastique) en négligeant cette déformation trapézoïdale.



En effet, au cours d'une rotation assez faible q_2 d'une section A B de la poutre, une fibre longitudinale de longueur initiale ℓ_o aura pour dimension :

(1) $$\ell_1 = \ell_o (1+\varepsilon_x)$$

Les allongements correspondants selon les axes oy et oz seront :

(2) $$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x$$

Le coefficient de Poisson ν équivalent évoluant de 0,3 à 0,5 quand on passe du cas parfaitement élastique au cas parfaitement plastique.

Les éléments de longueurs dy et dz respectivement selon les axes oy et oz auront pour longueur déformée :

(3) $$dy(1+\varepsilon_y) = dy(1-\nu\varepsilon_x)$$

(4) $$dz(1+\varepsilon_z) = dz(1-\nu\varepsilon_x)$$

Et un élément de section $dS_o = dy.dz$ deviendra :

(5) $$dy.dz(1-\nu\varepsilon_x)^2$$

Dans les calculs ultérieurs des efforts, les dS_o n'interviennent que par des produits avec des termes de l'ordre de ε_x . Les termes où intervient la variation de dS_o seront donc des termes de l'ordre de ε_x^2 et il peut être admis de les négliger sans commettre une erreur importante, et de considérer, par conséquent, que la section de la poutre est invariable.

b - En toute rigueur la position de la fibre neutre d'une section droite de la poutre varie au cours de la sollicitation.

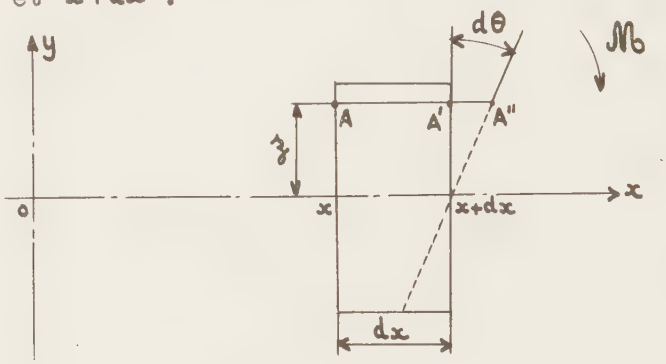
Un calcul effectué par rapport à la nouvelle position de la fibre neutre conduit à une expression du moment fléchissant ne différant que par des termes de l'ordre de q_i^2 , du moment fléchissant calculé à partir d'une position invariable de la ligne neutre.

Cette différence étant négligeable en raison des petits déplacements imposés la position de la fibre neutre sera considérée comme invariable.

Il sera également supposé que toute section droite de la poutre reste plane au cours de sa rotation.

I,2. CONTRAINTE EN UN POINT DE LA POUTRE

Soit un élément de poutre compris entre deux sections d'abscisses x et $x+dx$:



Seuls les cas où interviennent de petits dépassements de la limite élastique pour la fibre la plus exposée sont considérés. Ce qui rend acceptable une linéarisation en θ .

Sous l'action du moment de flexion, la section d'abscisse $x+dx$ tourne d'un angle $d\theta$ par rapport à la section d'abscisse x .

L'élément de côte z et de longueur initiale dx (AA') subit un allongement :

$$d(dx) = A'A'' = z.d\theta \qquad (6)$$

La déformation unitaire correspondante est :

$$\varepsilon = \frac{d(dx)}{dx} = z\frac{d\theta}{dx} \qquad (7)$$

Si $y = f(x)$ est l'expression de la déformée de la ligne moyenne ox en fonction de l'abscisse il vient, toujours dans les conditions de linéarisation :

$$\theta = \frac{dy}{dx} \qquad (8)$$

d'où :

$$\varepsilon = z\frac{\delta^2 y}{\delta x^2} \qquad (9)$$

La vitesse de déformation correspondante est alors :

$$\dot{\varepsilon} = z\frac{\delta^3 y}{\delta x^2 . \delta t} \qquad (10)$$

En un point quelconque de la structure la contrainte sera supposée fonction de la déformation ainsi que de la vitesse de dé-

formation totale, elle pourrait en outre être fonction de la température, ou d'autres paramètres, mais il n'en est pas tenu compte dans cette étude.

Nous adopterons l'hypothèse simplificatrice selon laquelle la vitesse de déformation plastique $\dot{\varepsilon}_p$ est assimilée à la vitesse de déformation totale $\dot{\varepsilon}$, l'allongement relatif ε_p n'est alors pas considéré, du point de vue global, comme étant un degré de liberté indépendant. En toute rigueur il faudrait écrire :

(11) $$\frac{\sigma}{E} = g\left(\varepsilon, \dot{\varepsilon}_p\right)$$

Mais l'hypothèse selon laquelle $\dot{\varepsilon}_p \# \dot{\varepsilon}$, expliquée dans un chapitre ultérieur, conduit à :

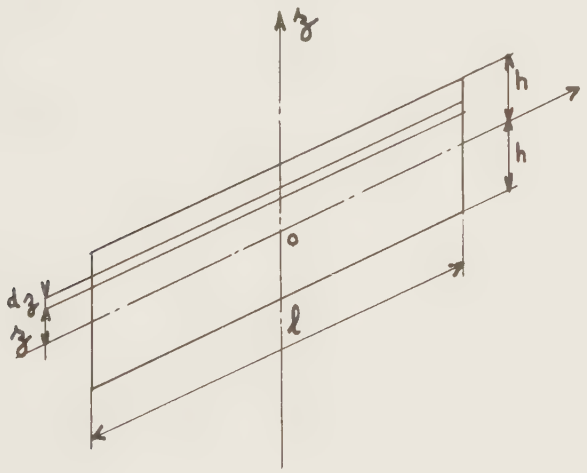
(12) $$\frac{\sigma}{E} = g\left(\varepsilon, \dot{\varepsilon}\right)$$

soit :

(13) $$\boxed{\frac{\sigma}{E} = g\left(z\frac{\delta^2 y}{\delta x^2}, z\frac{\delta^3 y}{\delta x^2 \delta t}\right)}$$

I,3. MOMENT DES FORCES INTERIEURES

Il est calculable en chaque section de la poutre.
La poutre est de section constante, rectangulaire :



Un élément de surface dS est soumis à une force :

(14) $$dF = \sigma . dS$$

Soit :

(15) $$dF = E . g\left(z\frac{\delta^2 y}{\delta x^2}, z\frac{\delta^3 y}{\delta x^2 . \delta t}\right) . dS$$

Chaque section restant plane en cours de flexion de la poutre tous les points situés à une même cote z de la fibre neutre accusent un même allongement, avec une même vitesse de déformation. De ce fait les contraintes seront les mêmes pour tous les points situés à une même côte z.

L'élément de section situé à la côte z a pour valeur :

(16) $$dS = \ell . dz$$

Il est soumis à la force :

(17) $$dF = E.\ell . g\left(z\frac{\delta^2 y}{\delta x^2}, z\frac{\delta^3 y}{\delta x^2 \delta t}\right).dz$$

Le moment correspondant est :

(18) $$d\mathcal{M} = dF.z$$

Soit :

(19) $$d\mathcal{M} = E.\ell . g\left(z\frac{\delta^2 y}{\delta x^2}, z\frac{\delta^3 y}{\delta x^2 \delta t}\right) z\,dz$$

Le moment relatif à une section entière de poutre est :

(20) $$\mathcal{M} = 2\int_0^h d\mathcal{M}(z)$$

(21) $$\mathcal{M} = 2E\ell\int_0^h g\left(z\frac{\delta^2 y}{\delta x^2}, z\frac{\delta^3 y}{\delta x^2 \delta t}\right) z\,dz$$

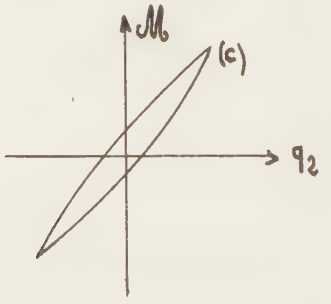
Soit :

(22) $$\boxed{\mathcal{M} = f\left(\frac{\delta^2 y}{\delta x^2}, \frac{\delta^3 y}{\delta x^2 . \delta t}\right)}$$

I,4. ENERGIE DISSIPEE PAR CYCLE DE DEFORMATION : ΔW

L'expression du moment des forces intérieures est fonction d'un terme traduisant une rotation : $\frac{\delta^2 y}{\delta x^2}$.

L'application périodique de charges, d'abord croissantes, puis décroissantes, conduit, nous le verrons, à l'obtention asymptotique d'un cycle dans des axes : Moment-Rotation.



$\mathcal{M}$ = moment

q_2 = rotation

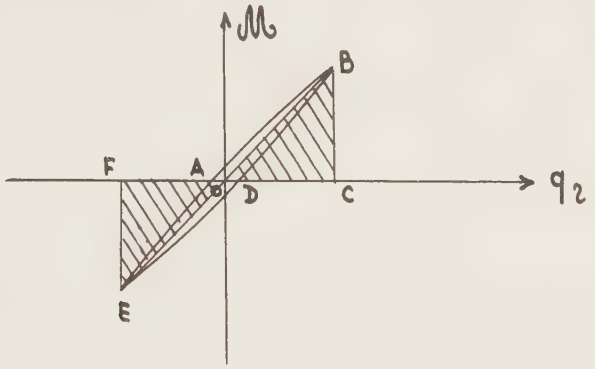
L'aire du cycle tracé en ces axes représente l'énergie dissipée par cycle :

(23) $$\Delta W = \oint_{(C)} M_b(q_2, \dot{q}_2) \cdot dq_2$$

Soit :

(24) $$\boxed{\Delta W = \oint_{(C)} f\left(\frac{\delta^2 y}{\delta x^2}, \frac{\delta^3 y}{\delta x^2 \cdot \delta t}\right) \cdot d\left(\frac{\delta^2 y}{\delta x^2}\right)}$$

I,5. CAPACITE D'ENERGIE CYCLIQUE : W



Pour un cycle tracé dans des axes : Moment-Rotation, ou encore : charge-allongement, les non linéarités des courbes délimitant le cycle peuvent être considérées comme créant la dissipation dans la structure étudiée et, par conséquent, la force de rappel peut être représentée par la droite E O B (ou moment de rappel s'il s'agit d'axes : Moment-Rotation).

La capacité d'énergie cyclique est alors représentée par l'aire O B C O E F O, calculable à partir de l'expression du moment par intégration.

I,6. COEFFICIENT D'AMORTISSEMENT VISQUEUX EQUIVALENT :

A partir des expressions de l'énergie dissipée par cycle et de la capacité d'énergie cyclique, le coefficient d'amortissement visqueux équivalent, pour un système faiblement non linéaire est exprimé par :

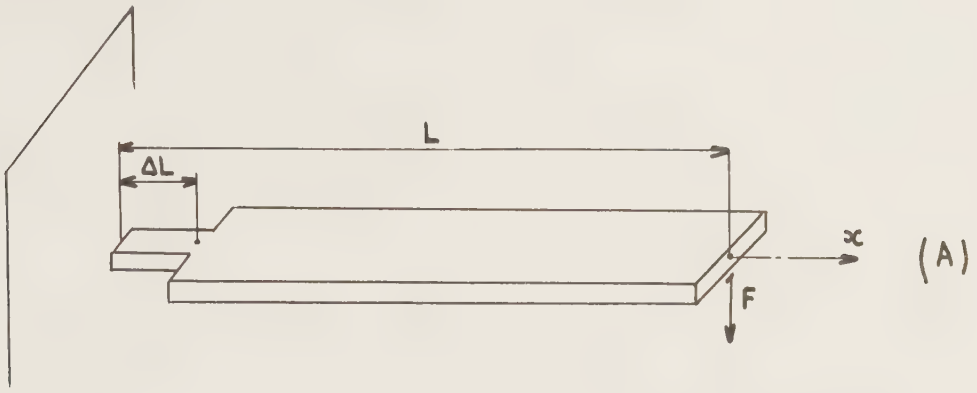
(25) $$\boxed{\nu_{eq} = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta W}{W}}$$

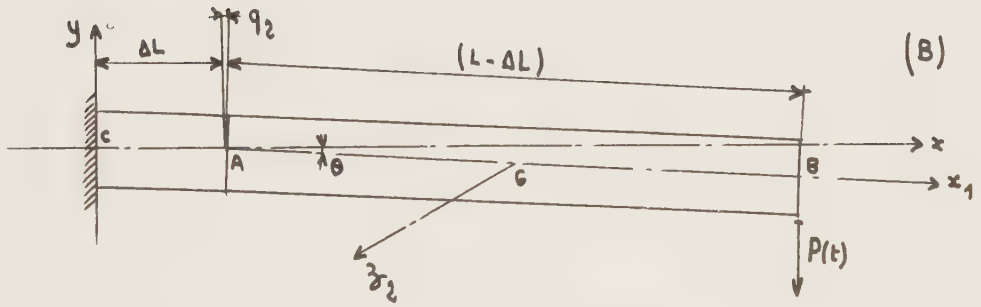
Chapitre II - EQUATIONS DE LAGRANGE POUR UNE POUTRE AMINCIE AU VOISINAGE DE L'ENCASTREMENT

Dans toute la suite de l'étude une simplification importante à été apportée en s'assurant que le fluage serait localisé dans une partie bien précise de la structure. C'est ainsi que les sections de la poutre voisines de l'encastrement ont été réduites volontairement, sur une longueur ΔL suffisamment petite pour que le rayon de courbure de la déformée puisse être considéré comme constant sur cette longueur. Cette réduction de section localisée pose des problèmes sérieux, du fait qu'on ne saurait assurer jusqu'à quel point le principe de ST VENANT reste valable dans ce domaine. Les expériences effectuées en quasi-statique sur la poutre ont montré qu'heureusement tout se passait comme si la notion de fibre pouvait être conservée.

Dans la première partie de ce chapître est traité le problème très simple d'une poutre dont la partie extérieure à la tranche fluante est considérée comme parfaitement rigide. Un seul paramètre généralisé, la rotation q_2 de la section terminale de la tranche fluante, suffit alors à caractériser l'évolution du système. Dans la seconde partie du chapître, la partie non amincie de la poutre est supposée déformable, et l'étude du premier mode de la structure est faite suivant une méthode proposée par R. MAZET, avec introduction de deux paramètres généralisés qualifiant, l'un la rotation de la tranche fluante, l'autre la déformation de la partie élastique. Ces hypothèses permettent un calcul aisé des équations de LAGRANGE du système.

II,1. CAS OU LA PARTIE NON REDUITE DE LA POUTRE EST RIGIDE





La poutre étudiée est représentée sur la figure (A) ; la figure (B) représentant l'allure de la déformation compte-tenu du fait que le tronçon A B est considéré comme parfaitement rigide. (Cette hypothèse serait parfaitement vérifiée si l'inertie de section dans le tronçon A B était infiniment plus grande que celle du tronçon C A).

II,1.1. Expression analytique de la déformée

Sur la longueur ΔL au voisinage de l'encastrement le rayon de courbure de la déformée est supposé constant, et, par conséquent, q_2 étant la rotation de la section ΔL, la flèche sur le tronçon C A est définie par l'équation :

(26) $$y_1(x,t) = \frac{x^2}{2\Delta L} \cdot q_2$$

Quant à la flèche du tronçon A B rigide elle est donnée par :

(27) $$y_{2(x,t)} = \frac{q_2}{2}\Delta L + q_2 (x - \Delta L)$$

D'où l'expression générale de la déformée :

(28) $$y(x,t) = \begin{cases} \frac{x^2}{2\Delta L} \cdot q_2 & \text{pour} \quad 0 < x < \Delta L \\ q_2 \left(x - \frac{\Delta L}{2}\right) & \text{pour} \quad \Delta L < x < L \end{cases}$$

q_2 suffit donc à caractériser l'état de la poutre, ce sera la coordonnée généralisée.

II,1.2. Calcul de l'énergie cinétique :

L'énergie cinétique pour l'ensemble de la poutre est égale à la somme de l'énergie cinétique de la partie fluante et de l'énergie cinétique de la partie rigide.

(29) $$2T = 2T_{AC} + 2T_{AB}$$

a - Calcul de l'énergie cinétique du tronçon A C : $2T_{AC}$

En raison de l'expression de la flèche sur le tronçon C A on trouve :

(30) $$2T_{AC} = \int_0^{\Delta L} \rho . dx . \left(\frac{\delta y_1}{\delta t}\right)^2$$

(31) $$2T_{AC} = \frac{m}{20} \left(\Delta L . \dot{q}_2\right)^2$$

m étant la masse de la tranche fluante.

Cette tranche de poutre est de très faibles dimensions par rapport au tronçon rigide, sa masse m est très petite ainsi que ses flèches et il ne sera pas commis une grosse erreur en négligeant son énergie cinétique devant celle du tronçon rigide :

(32) $$2T_{AC} \# 0$$

b - Calcul de l'énergie cinétique du tronçon A B : $2T_{AB}$

Cette partie de la poutre reste rigoureusement rigide et ne fait que subir une rotation d'angle θ .

(33) $$2T_{AB} = M.V_G^2 + 2T_1$$

M est la masse du tronçon rigide de poutre.

V_G est la vitesse du centre de gravité G.
$2T_1$ est l'énergie cinétique autour de l'axe $\mathcal{Y}_2$.

(34) $$MV_G^2 = M\dot{q}_2^2 \left(\frac{L+\Delta L}{2}\right)^2$$

(35) $$2T_1 = M\dot{q}_2^2 \frac{(L-\Delta L)^2}{12}$$

et :

(36) $$2T_{AB} = M\frac{L^2+L\Delta L+\Delta L^2}{3}\dot{q}_2^2$$

La quantité $2T_{AC}$ étant négligeable, l'énergie cinétique totale sera $2T_{AB}$. La dimension ΔL étant très petite devant L , il pourra être admis que la quantité ΔL^2 est négligeable devant les quantités L et $L.\Delta L$.
Il vient alors :

(37) $$\boxed{2T = M.\frac{L(L+\Delta L)}{3}.\dot{q}_2^2}$$

II,1.3. Calcul des travaux virtuels :

Le tronçon A B étant rigide, les seuls travaux virtuels des forces de déformation proviennent de la flexion de la tranche fluante.
Le moment des forces intérieures sur une section est :

(38) $$dM = 2E\ell\int_0^h g\left(\mathcal{Y}\frac{\delta^2 y}{\delta x^2}, \mathcal{Y}\frac{\delta^3 y}{\delta x^2.\delta t}\right)\mathcal{Y}\,d\mathcal{Y}$$

soit :

(39) $$dM = f\left(\frac{\delta^2 y}{\delta x^2}, \frac{\delta^3 y}{\delta x^2.\delta t}\right)$$

En raison des hypothèses faites sur la déformation du tronçon A C il vient :

(40) $$\frac{\delta^2 y}{\delta x^2} = \frac{q_2}{\Delta L} \qquad \frac{\delta^3 y}{\delta x^2 \delta t} = \frac{\dot{q}_2}{\Delta L}$$

Et par conséquent :

(41) $$dM = f(q_2, \dot{q}_2)$$

A une petite variation δq_2 de la coordonnée généralisée correspond le travail virtuel :

(42) $$\delta V = dM(q_2, \dot{q}_2).\delta q_2$$

soit :

(43) $$\boxed{\delta V = f(q_2, \dot{q}_2) \cdot \delta q_2}$$

II,1.4. Equations de LAGRANGE

La seule coordonnée généralisée est ici la rotation $q_2(t)$ de la section située à une distance ΔL de l'encastrement (avec la condition $\Delta L \ll L$), l'équation de LAGRANGE permettra l'écriture de l'équation du mouvement en $q_2(t)$.

Si $q_i(t)$ est le paramètre, les équations de LAGRANGE s'écrivent :

(44) $$\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\delta T}{\delta \dot{q}_i}\right) - \frac{\delta T}{\delta q_i} + f(q_i, \dot{q}_i) = 0$$

Soit ici :

(45) $$\boxed{M\frac{(L+\Delta L)L}{3}\ddot{q}_2 + f(q_2, \dot{q}_2) = 0}$$

II,2. CAS GENERAL OU LA PARTIE NON AMINCIE EST SUSCEPTIBLE DE DEFORMATIONS ELASTIQUES :

La partie A B de la poutre n'est plus rigide mais accuse une flèche.

Suivant une hypothèse de travail de R. MAZET on emploie la méthode de RAYLEIGH-RITZ qui consiste à représenter simplement la déformée en chaque point comme dûe à la superposition de deux déformations élémentaires :

- l'une une rotation de la tranche A, représentée par le paramètre $q_2(t)$
- l'autre une déformation élastique, représentée par le paramètre de rotation. $q_1(t)$.

La déflexion totale s'exprimera alors ainsi en tout point :

(46) $$y(x,t) = q_2(t).F(x) + q_1(t).G(x)$$

Il peut être admis que la déformée du tronçon A B soit suffisamment faible pour que toute fibre le composant évolue toujours dans un domaine purement élastique ; pour le tronçon A C, certaines fibres évolueront, par moment, dans le domaine plastique.

De sorte que le paramètre $q_1(t)$ pourra être vu comme un paramètre de déformation purement élastique alors que le paramètre $q_2(t)$ sera un paramètre de déformation élastoplastique. Les quantités $2T$ et $2V$ s'exprimeront en fonction de ces deux paramètres.

Il faut tout d'abord exprimer les flèches y_1 et y_2 des tronçons C A et A B de la poutre.

II,2.1. Expression analytique de la déformée :

La flèche du tronçon C A a déjà été exprimée dans le paragraphe II,1.1. de ce chapître :

(47) $$y_1(x,t) = q_2 \cdot f_1(x) \qquad \text{avec} \qquad f_1(x) = \frac{x^2}{2\Delta L}$$

La flèche du tronçon A B se compose d'un terme dû à la déformation élastoplastique du tronçon A C et d'un terme dû à la déformation élastique pure du tronçon A B :

(48) $$y_2(x,t) = q_2 \cdot f_2(x) + q_1 \cdot f_3(x)$$

La flèche dûe à la déformation élastoplastique du tronçon A C se traduit par une rotation d'ensemble du tronçon A B, ce qui implique à $f_2(x)$ la forme : $f_2(x) = a_1 x + b_1$. En exprimant que en $x = \Delta L$ la flèche purement élastique est nulle (c'est-à-dire que $f_3(\Delta L) = 0$) et qu'alors :

$$(y_2)_{x=\Delta L} = (y_1)_{x=\Delta L} \quad , \text{ ainsi que : } \left(\frac{\delta y_2}{\delta x}\right)_{x=\Delta L} = \left(\frac{\delta y_1}{\delta x}\right)_{x=\Delta L}$$

Il vient :

(49) $$f_2(x) = x - \frac{\Delta L}{2}$$

Dans le terme de déformation purement élastique l'expression $f_3(x)$ peut avoir la forme :

(50) $$f_3(x) = a_2 x^3 + b_2 x^2 + c_2 x + d_2$$

qui ne sera pas explicitée ici.

Il vient :

(51) $$y_2(x,t) = q_2 \cdot f_2(x) + q_1 \cdot f_3(x)$$

avec :

$$f_2(x) = x - \frac{\Delta L}{2}$$

$$f_3(x) = a_2 x^3 + b_2 x^2 + c_2 x + d_2$$

II,2.2. Calcul de l'énergie cinétique

a - Calcul de l'énergie cinétique du tronçon A C : $2T_{AC}$

Pour les mêmes raisons que dans le paragraphe II,1.2.a de ce même chapître il vient $2T_{AC} \# 0$

b - Calcul de l'énergie cinétique du tronçon A B : $2T_{AB}$

La déformation du tronçon A B est purement élastique, aussi les hypothèses de l'élasticité lui sont elles applicables :

(52) $$2T_{AB} = \int_{\Delta L}^{L} \rho_2 \left(\frac{\delta y_2}{\delta t}\right)^2 dx$$

ρ_2 étant la masse de tronçon A B par unité de longueur.

Il a été vu que :

$$y_2(x,t) = q_2 \cdot f_2(x) + q_1 \cdot f_3(x)$$

(53) $$\dot{y}_2(x,t) = \dot{q}_2 \cdot f_2(x) + \dot{q}_1 \cdot f_3(x)$$

Et :

(54) $$2T_{AB} = \int_{\Delta L}^{L} \rho_2 \left[\dot{q}_2 \cdot f_2(x) + \dot{q}_1 \cdot f_3(x)\right]^2 dx$$

Il vient :

(55) $$2T_{AB} = C_1 \cdot \dot{q}_1^2 + C_2 \cdot \dot{q}_2^2 + 2 C_3 \dot{q}_1 \dot{q}_2$$

avec :

$$C_1 = \rho_2 \int_{\Delta L}^{L} f_3^2(x) \cdot dx$$

$$C_2 = \rho_2 \int_{\Delta L}^{L} f_2^2(x) \cdot dx$$

$$C_3 = \rho_2 \int_{\Delta L}^{L} f_2(x) \cdot f_3(x) \cdot dx$$

L'énergie cinétique totale du système s'écrit :

(56) $$\boxed{2T = C_1 \dot{q}_1^2 + C_2 \dot{q}_2^2 + 2 C_3 \dot{q}_1 \dot{q}_2}$$

II,2.3. Calcul des travaux virtuels :

Ils seront dûs, ici, à la déformation de chacun des deux tronçons de la poutre :

- déformation élastoplastique pour le tronçon A C
- déformation purement élastique pour le tronçon A B

Et :

(57) $$\delta V = \delta V_{AC} + \delta V_{AB}$$

a - Travail virtuel pour le tronçon A C : δV_{AC}

Le calcul est le même que celui qui a été développé dans le paragraphe II,1.3. de ce même chapître et :

(58) $$\boxed{\delta V_{AC} = f(q_2, \dot{q}_2) \cdot \delta q_2}$$

b - Travail virtuel pour le tronçon A B : V_{AB}

L'énergie potentielle de déformation pour ce tronçon est dûe à sa seule déformation élastique, les lois de l'élasticité pourront être utilisées à condition de ne considérer que la partie élastique de la flèche totale du tronçon A B, il sera alors posé, avec cette approximation :

(59) $$y_2(x,t) \approx q_1 \cdot f_3(x)$$

(60) $$2V_{AB} = \int_{AL}^{L} EI_1 \left[\frac{\delta^2 (q_1 \cdot f_3(x))}{\delta x^2} \right]^2 dx$$

I_1 est l'inertie d'une section du tronçon A B par rapport à l'axe de flexion.

(61) $$2V_{AB} = \int_{AL}^{L} EI_1 \left[q_1 \cdot f_3''(x) \right]^2 dx$$

(62) $$\boxed{V_{AB} = \frac{D_1}{2} \cdot q_1^2} \qquad \text{avec} \qquad D_1 = EI_1 \int_{AL}^{L} f_3''^2(x) \cdot dx.$$

II,2.4. Equations de LAGRANGE

Elles s'écriront à partir des résultats (56) (58) et (62)

(63) $$\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\delta T}{\delta \dot{q}_i}\right) - \frac{\delta T}{\delta q_i} + \left(\frac{\delta V_{AC}}{\delta q_i} + \frac{\delta V_{AB}}{\delta q_i}\right) = 0$$

Pour les paramètres $q_i = q_1$ puis $q_i = q_2$ il vient :

(64) $$\boxed{C_1 \ddot{q}_1 + C_3 \ddot{q}_2 + D_1 q_1 = 0}$$

(65) $$\boxed{C_3 \ddot{q}_1 + C_2 \ddot{q}_2 + f(q_2, \dot{q}_2) = 0}$$

Nous obtenons ainsi un ensemble de deux équations différentielles non linéaires qui résolvent le problème.

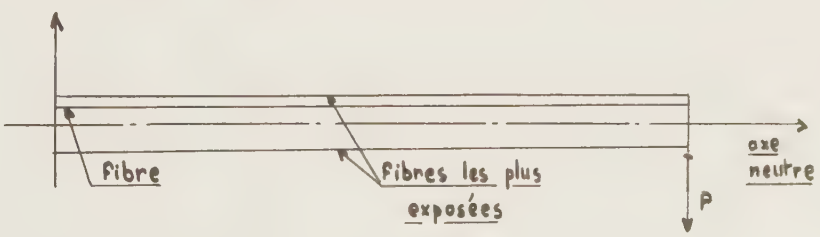
Cette solution présente pratiquement de graves difficultés du fait que la fonction $f(q_2, \dot{q}_2)$ présente deux déterminations suivant que l'on suit une loi de charge $(q_2 \cdot \dot{q}_2 > 0)$ ou une loi de décharge $(q_2 \dot{q}_2 < 0)$.

Chapitre III - C Y C L E S E T L O I S D E C O M P O R T E M E N T

Nous avons vu dans le chapître précédent que la résolution des équations différentielles non linéaires auxquelles nous aboutissions était pratiquement impossible. Cette résolution est en fait un "luxe" au regard du but que nous nous proposons, qui est, non pas l'étude de l'évolution détaillée de la structure au cours du temps mais seulement la connaissance de l'amortissement visqueux équivalent à la résonance du premier mode. Ce chapître traitera de la notion de cycles qui correspondent à une énergie dissipée dont nous avons vu au chapître I qu'elle suffisait à déterminer l'amortissement visqueux équivalent de la structure. Après un aperçu sur la notion même de cycle, nous indiquerons, en partant de modèles simples, quelles lois de comportement de la fibre peuvent être appliquées au calcul des cycles. A cette occasion seront étudiées, pour un cycle, les limites de validité de l'hypothèse suivant laquelle la vitesse de déformation plastique et la vitesse de déformation globale pouvaient être confondues.

III,1. NOTION DE CYCLES :

A ce stade de l'étude il sera nécessaire de considérer la poutre étudiée comme étant composée d'un ensemble de fibres. Chaque fibre étant un cylindre à base quelconque, de très faible section et dont les génératrices sont parallèles à la direction de plus grande dimension de la poutre.



Une flexion de la poutre entraînera, en raison de l'hypothèse de KIRCHHOFF-LOVE, une traction ou une compression de chacune des fibres, les allongements provoqués étant d'autant plus importants que la fibre considérée sera éloignée de l'axe neutre de la poutre. La fibre la plus exposée est la fibre la plus éloignée de l'axe neutre dans le plan défini par la force créant la flexion, et l'axe neutre lui-même.

Pour chaque fibre, l'allongement positif ou négatif pourra être étudié en fonction de la contrainte qui lui est liée et le phénomène pourra être représenté dans des axes : contrainte-déformation :

Le théorème d'EULER permet d'appliquer la notion de fibre à la partie élastique, ou suppose pouvoir étendre cette propriété au cas où la limite élastique est faiblement dépassée ; chaque fibre se comportera comme une éprouvette de traction (ou compression) pour laquelle la courbe (σ, ε) présentera :

- un domaine élastique

- un domaine plastique quand la déformation dépassera un certain seuil.

- un domaine élastique à nouveau lors d'une décharge.

Le point figuratif de chaque fibre dans des axes (σ, ε) se trouvera dans un domaine élastique pour les fibres à faible allongement, c'est-à-dire voisines de l'axe neutre de la poutre, et dans un domaine plastique pour les fibres les plus éloignées de l'axe neutre.

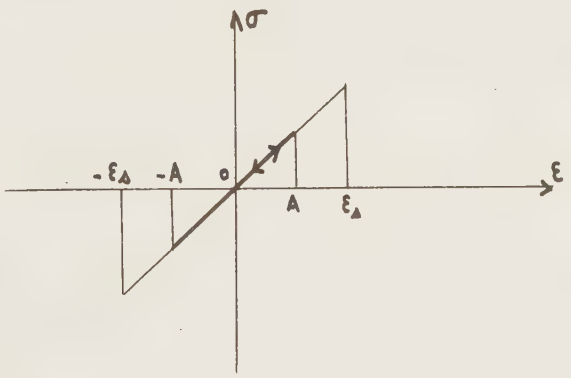
Une sollicitation de la poutre en flexion, animée d'un mouvement périodique entraînera un phénomène périodique de traction-

compression de chacune des fibres considérées, ceci permet d'introduire la notion de cycle, au stade de la fibre, dans des axes (σ, ε) .

Cycles possibles au cours de l'évolution de la fibre la plus exposée :

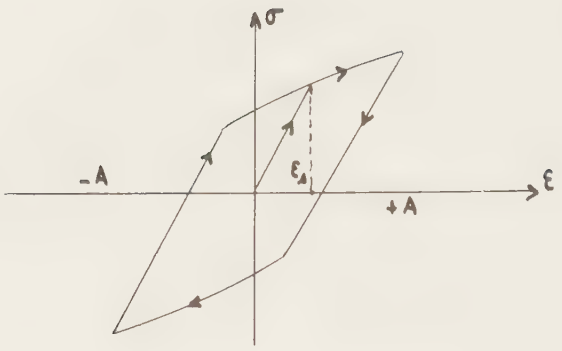
La position naturelle d'équilibre de la poutre de flexion, encastrée à une extrémité et non encore sollicitée, est une position rigoureusement horizontale :

a - Une légère excitation périodique de la poutre pourra être telle que la fibre la plus exposée, alors sollicitée alternativement en traction et compression ne dépasse pas le seuil de limite élastique ε_A dans un sens comme dans l'autre. Le cycle décrit par la fibre la plus exposée dans des axes (σ, ε) sera alors réduit à une droite passant par l'origine des axes et de pente E (module d'Young) et telle que toujours $|A| < |\varepsilon_A|$.

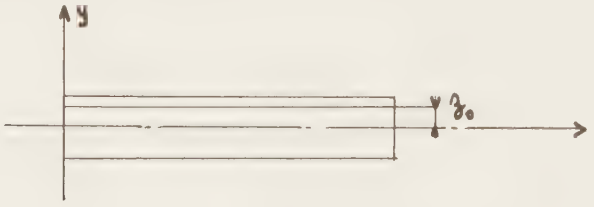


La fibre la plus exposée ne dépassant pas le seuil de limite élastique, à fortiori toutes les autres fibres ne le dépasseront pas puisque moins sollicitées et le comportement global de la poutre sera totalement élastique en ce cas.

b - Une excitation périodique plus importante pourra amener la fibre la plus exposée à dépasser le seuil de limite élastique ε_A et à évoluer alors dans le domaine plastique. Le point figuratif de la fibre étudiée ne décrira plus ici une droite élastique mais un cycle complet délimitant une aire différente de zéro et décrit dans le domaine plastique.

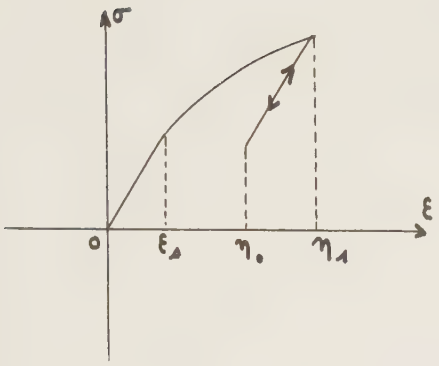


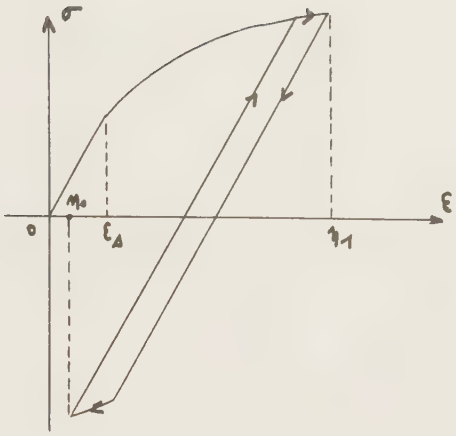
Si l'excitation est suffisamment importante la fibre la plus exposée ne sera pas seule à décrire un cycle, mais toutes les fibres situées à une certaine côte $y > y_0$ décriront des cycles similaires d'aire d'autant moins importante que la fibre considérée sera proche de l'axe neutre de la poutre.



c - Il se peut que la poutre ait été une première fois sollicitée en flexion de façon suffisamment importante pour qu'elle accuse une déformation plastique permanente telle que sa position d'équilibre soit une position flèchie.

Une excitation autour de cette nouvelle position d'équilibre pourra conduire aux mêmes types de cycles que ceux décrits précédemment mais décalés par rapport à l'origine des axes (σ, ε)



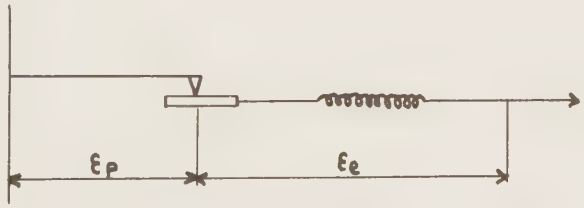


III,2. MODELES MECANIQUES DE FIBRES DANS LE CAS ELASTIQUE PARFAITEMENT PLASTIQUE

La notion de fibre a été abordée dans le paragraphe précédent ; la fibre microscopique, que nous définirons complétement au chapître IV, sera une fibre élémentaire dont le comportement sera celui d'une fibre élastique parfaitement plastique.

Le comportement de chacune des fibres microscopiques est traduit à l'aide de modèles mécaniques. Deux modèles classiques sont proposés dans cette étude.

III,2.1. Le modèle simplifié :



Un ressort de module E et un patin à frottement sec, de seuil ε_M , sont montés en série.

Le seuil ε_M du patin est fonction de la vitesse de déformation totale $\dot{\varepsilon}$ de la fibre.

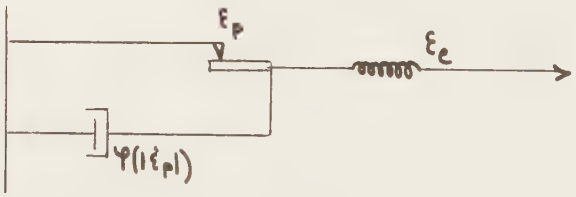
(66) $$\varepsilon_M(\dot{\varepsilon}) = \varepsilon_{M_0} + \varphi(|\dot{\varepsilon}|)$$

ε_{M_0} est la valeur du seuil à vitesse $\dot{\varepsilon}=0$.

$\varphi(|\dot{\varepsilon}|)$ a pour expression $(\tau|\dot{\varepsilon}|)^{\frac{1}{n}}$ où n et τ sont des constantes caractéristiques du matériau.

La fonction $\varphi(|\dot{\varepsilon}|)$ est surtout utilisable en fluage établi et polit assez bien les courbes en ce domaine. Dans cette étude ne sont considérés que de faibles dépassements de la limite élastique, conduisant à une évolution dans le domaine du fluage primaire ; l'utilisation de la fonction $\varphi(|\dot{\varepsilon}|)$ en ce domaine pourra être admise, tout au moins en première approximation.

III,2.2. Le modèle de BINGHAM-HOFF



Un ressort de module E est monté en série avec l'ensemble : patin à frottement sec de seuil ε_M fixe et dash-pot non linéaire montés en parallèle.

Le seuil ε_M du patin est ici indépendant de la vitesse de déformation totale de la fibre.

Les calculs ultérieurs sont effectués en supposant que $\dot{\varepsilon} \simeq \dot{\varepsilon}_p$ ce qui rend équivalents les deux modèles précités.

III,3. JUSTIFICATION DE L'HYPOTHESE $\dot{\varepsilon} \simeq \dot{\varepsilon}_p$

Nous avons dit, dans le chapître I que nous admettions que l'on pouvait confondre la vitesse de déformation plastique et la vitesse de déformation globale pour les problèmes qui nous inté-

ressaient. Il va être possible, pour une microfibre correspondant au modèle de BINGHAM-HOFF, de préciser dans quelles conditions l'équation de comportement :

(67) $\varepsilon_p + \left(\tau \dot{\varepsilon}_p\right)^{\frac{1}{n}} = \varepsilon - \varepsilon_M$ admettra que $\dot{\varepsilon}_p \# \dot{\varepsilon}$

On supposera que le mouvement de la fibre est périodique et que le premier harmonique de la déformation plastique (seul utile à la prévision de l'amortissement équivalent) est de la forme :

(68) $$\varepsilon_p = \varepsilon_0 e^{i\omega t}$$

Nous rechercherons dans quelles conditions :

(69) $$\frac{d}{dt}\left(\tau \dot{\varepsilon}_p\right)^{\frac{1}{n}} \ll \dot{\varepsilon}_p$$

Nous remarquons tout d'abord que l'équation de comportement dérivée a la forme :

(70) $$\dot{\varepsilon}_p + \tau^{\frac{1}{n}} \frac{1}{n} \dot{\varepsilon}_p^{\frac{1}{n}-1} \ddot{\varepsilon}_p = \dot{\varepsilon}$$

et notre problème est de chercher quand on peut considérer que le premier harmonique B_1 de :

(71) $\tau^{\frac{1}{n}} \frac{1}{n} \dot{\varepsilon}_p^{\frac{1}{n}-2} \ddot{\varepsilon}_p$ est $\ll 1$

Or il vient :

$$\frac{\tau^{\frac{1}{n}}}{n}\left(\dot{\varepsilon}_p\right)^{\frac{1}{n}-2}\ddot{\varepsilon}_p = \tau^{\frac{1}{n}}\frac{1}{n}\left(i\varepsilon_0\omega e^{i\omega t}\right)^{\frac{1}{n}-2}\left(-\omega^2\varepsilon_0 e^{i\omega t}\right)$$

(72) $$= \tau^{\frac{1}{n}}\frac{1}{n}(i)^{\frac{1}{n}-2}\omega^{\frac{1}{n}}\varepsilon_0^{\frac{1}{n}-1}\left(e^{i\omega t}\right)^{\frac{1}{n}-1}$$

Le coefficient du premier harmonique de ce terme est :

(73) $$B_1 = \frac{1}{T}\int_0^T \tau^{\frac{1}{n}}\frac{1}{n}(i)^{\frac{1}{n}-2}\omega^{\frac{1}{n}}\varepsilon_0^{\frac{1}{n}-1}\left(e^{i\omega t}\right)^{\frac{1}{n}} dt$$

Soit :

(74) $$B_1 = \frac{\tau^{\frac{1}{n}}\frac{1}{n}(i)^{\frac{1}{n}-2}\omega^{\frac{1}{n}}\varepsilon_0^{\frac{1}{n}-1}}{T}\,\frac{\left[e^{\frac{2\pi i}{n}}-1\right]}{\frac{i\omega}{n}}$$

et :

(75) $$|B_1| \ll \frac{\tau^{\frac{1}{n}}\omega^{\frac{1}{n}-1}\varepsilon_0^{\frac{1}{n}-1}}{T}$$

Posant : $\omega = \frac{2\pi}{T}$ la condition selon laquelle on peut confondre $\dot{\varepsilon}_p$ et $\dot{\varepsilon}$ sera :

(76) $$\left(\frac{2}{T}\right)^{\frac{1}{n}} (2\pi)^{\frac{1}{n}-1} \varepsilon_0^{\frac{1}{n}-1} \ll 1$$

Cette condition ne peut être vérifiée que si la période T est supérieure à une valeur T_0 donnée, donc si la fréquence f de vibrations est inférieure à une valeur donnée f_0 (pour une amplitude ε_0 du mouvement).

La théorie proposée n'est valable que dans ces conditions, qui restent valables pour les expériences effectuées.

III,4. EQUIVALENCE DES DEUX MODELES :

Avec l'hypothèse précédente faite il vient, pour le premier modèle :

(77) $$\sigma = E \cdot \varepsilon_M(\dot{\varepsilon})$$

(78) $$\sigma = E\left[\varepsilon_{M_0} + \varphi(|\dot{\varepsilon}|)\right]$$

et pour le second modèle :

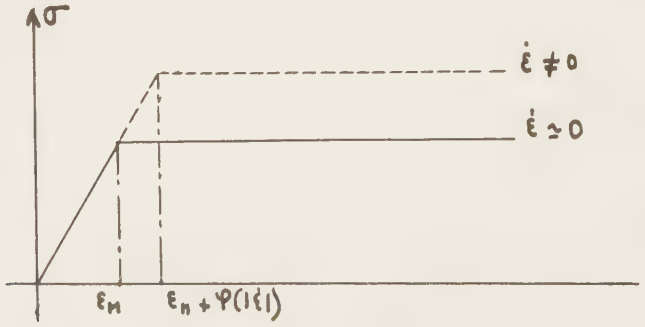
(79) $$\sigma = E\left[\varepsilon_{M_0} + \varphi(|\dot{\varepsilon}_p|)\right]$$

mais $\dot{\varepsilon}_p \simeq \dot{\varepsilon}$ et :

(80) $$\sigma = E\left[\varepsilon_{M_0} + \varphi(|\dot{\varepsilon}|)\right]$$

L'expression $\sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$ est la même pour chacun des deux modèles, il y a équivalence pour eux et les calculs qui suivront seront effectués à l'aide de l'un d'eux seulement.

Le comportement de chaque fibre microscopique dans des axes (σ, ε) sera le suivant :



La valeur du palier croit avec la vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}$ et cette valeur est obtenue pour :

$$\varepsilon = \varepsilon_m + \varphi(|\dot{\varepsilon}|)$$

Chapitre IV - CAS D'UN MATERIAU POUR LEQUEL ON PEUT NEGLIGER L'INFLUENCE DES VITESSES DE DEFORMATION

En résumé nous avons, dans les chapîtres précédents, étudié, d'une part les équations différentielles traduisant l'évolution de la poutre, d'autre part les propriétés générales des cycles parcourus par les diverses fibres, qui permettaient un calcul approximatif de l'énergie dissipée, donc de l'amortissement visqueux équivalent. Les matériaux utilisés pour la fabrication de la poutre étaient quelconques, et les contraintes fonction à la fois de la déformation et de la vitesse de déformation.

Une hypothèse simplificatrice très importante peut être apportée dès que l'on considére que l'énergie dissipée en raison de l'irréversibilité de l'écrouissage est beaucoup plus importante que l'énergie dissipée par viscosité. Le terme q_2 disparait alors de toutes les équations, et le calcul de l'amortissement visqueux équivalent peut être explicité complètement.

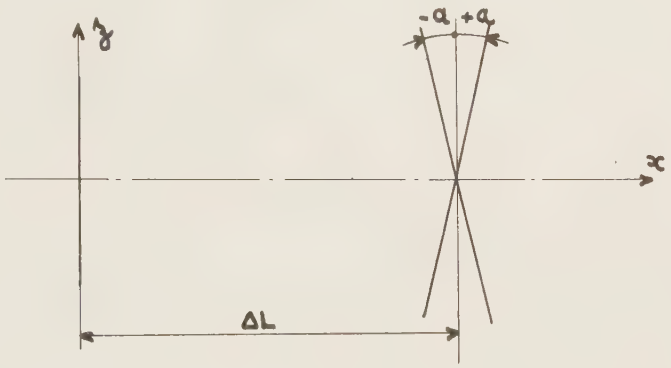
Dans la première partie du chapître est étudié le cas simple d'un matériau dont la loi de comportement est celle du solide élastique parfaitement plastique. Les calculs effectués complètement donnent une expression très simple de l'énergie dissipée, donc de l'amortissement visqueux équivalent. La seconde partie est consacrée à une poutre construite dans un matériau dont la loi d'écrouissage est quelconque, mais indépendante de la vitesse. Il est montré comment la connaissance de la loi "contrainte-déformation" statique permet le calcul effectif de l'énergie dissipée.

Ce chapître est uniquement théorique, mais il est utile de dire dès maintenant que l'hypothèse d'indépendance de la viscosité a été vérifiée expérimentalement (chapître V).

IV,1. CAS DU SOLIDE ELASTIQUE PARFAITEMENT PLASTIQUE :

Dans une première étude, afin d'obtenir un ordre de grandeur approximatif des énergies mises en jeu ainsi que de l'amortissement de la structure à l'aide d'un calcul simple, il sera supposé que toutes les fibres composant la poutre de flexion ont le même seuil de limite élastique ε_A .

Les déplacements maximaux de la poutre sont imposés et constants, la rotation maximale de la section d'abscisse $x = \Delta L$ (section limitant la tranche fluante) étant $\pm a$

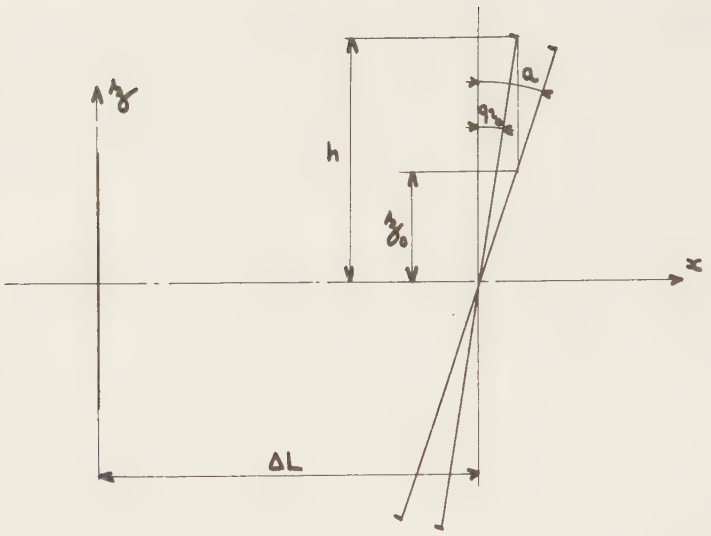


Au cours de la flexion de la poutre, certaines fibres évolueront dans le domaine plastique, décrivant des cycles à aire non nulle, et d'autres, les plus rapprochées de l'axe neutre de la poutre, évolueront constamment dans le domaine élastique. Les fibres situées à la frontière de ces deux domaines seront à une cote γ_0 telle qu'elles atteignent juste le seuil de limite élastique ε_A lorsque la rotation de la section limitant la tranche fluante sera $\pm a$

(81) $$\varepsilon_A = \frac{\gamma_0 \, a}{\Delta L} \qquad \text{soit} \qquad \gamma_0 = \frac{\varepsilon_A \cdot \Delta L}{a}$$

Il existe une rotation limite q_{20} pour laquelle seule la fibre la plus exposée atteindra le seuil de limite élastique ε_A . Pour toute valeur q_2 de la rotation de la tranche telle que $q_2 < q_{20}$ la poutre aura un comportement exclusivement élastique, cette valeur particulière de q_{20} étant :

(82) $$q_{20} = \frac{\varepsilon_A \cdot \Delta L}{h}$$



Il est supposé que les rotations sont suffisamment faibles pour que $\cos a \simeq 1$

Dans les calculs qui vont suivre il y aura lieu de distinguer les deux cas suivants :

α- si $a \leq q_{r_0}$

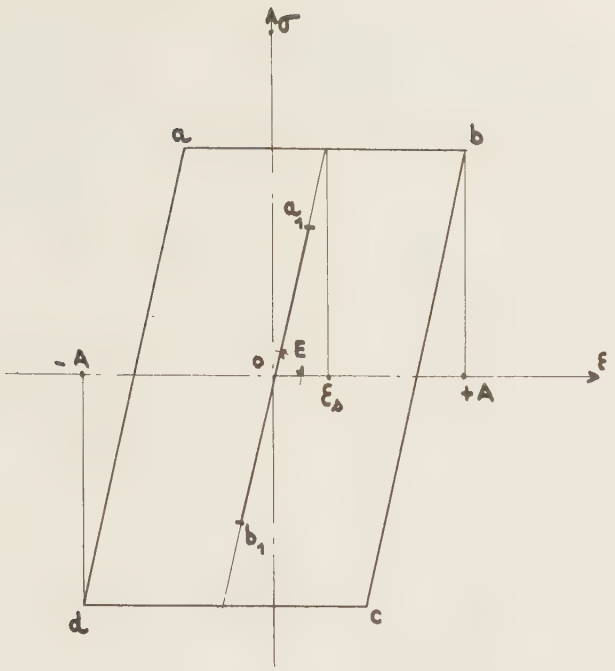
Toutes les fibres évolueront alors dans le domaine élastique et : $y_0 = h$

β- si $a > q_{r_0}$

Il existe une cote $y_0 = \frac{\varepsilon_d \cdot \Delta L}{a}$ telle que :

- les fibres pour lesquelles $0 < y \leq y_0$ évolueront constamment dans le domaine élastique.
- les fibres pour lesquelles $y_0 < y < h$ évolueront dans les domaines : élastique puis plastique.

IV,1.1. Calcul de l'énergie dissipée par cycle ΔW :

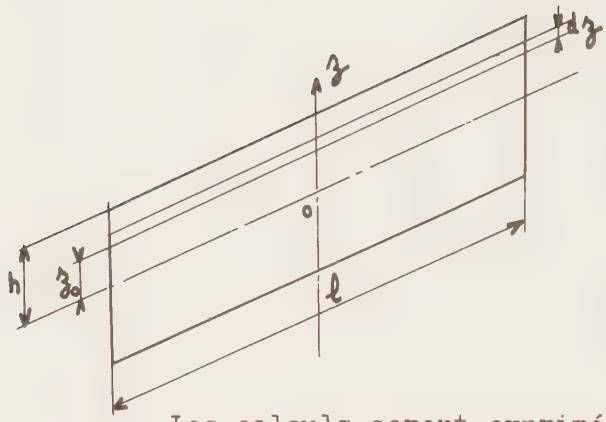


ΔW proviendra de la dissipation d'énergie dûe au glissement des patins figurés dans le modèle mécanique utilisé (l'équivalence des deux modèles proposés a été montrée), ce qui est traduit par les trajets **ab** et **cd** du cycle décrit dans des axes (σ, ε) (voir figure ci-avant).

L'énergie dissipée au cours du trajet **cd** est la même que celle décrite au cours du trajet **ab** , car elle intéresse des fibres symétriques par rapport à l'axe neutre de la poutre et il est admis que le comportement en compression est symétrique du comportement en traction. Au cours d'un cycle complet de la poutre, chaque branche telle que **ab** et **cd** est décrite deux fois, alternativement par une fibre en traction puis par une fibre en compression symétrique de la précédente par rapport à l'axe neutre, et réciproquement.

L'énergie totale dissipée pour un cycle de la poutre est donc quatre fois l'énergie dissipée pour aller de **a** à **b** , dont le calcul suit :

Pour une fibre évoluant dans le domaine plastique et dissipant de l'énergie, la contrainte est :



(83) $\sigma = E\varepsilon_b$

à laquelle correspond l'élément de force :

(84) $dF = El\varepsilon_b\, dz$

Le parcours effectué par cette force est :

(85) $dl = (\varepsilon_b - \varepsilon_a)\Delta L = 2(A - \varepsilon_b)\Delta L$

avec : $A = \dfrac{\gamma . a}{\Delta L}$

Les calculs seront exprimés en fonction de l'amplitude de rotation dans le domaine plastique :

(86) $p = a - q_{z_0}$

L'énergie dissipée correspondante est :

(87) $dW = \frac{1}{2}\, dF . dl$ soit :

(88) $dW = El\varepsilon_b . \Delta L \left[\dfrac{z}{\Delta L}(p + q_{z_0}) - \varepsilon_b\right] dz$

ceci pour un élément de surface $l.dz$ situé à une cote z telle que $z_0 < z < h$ puisque seul le domaine de plasticité est à considérer ici :

L'énergie dissipée est alors, pour la branche de cycle **ab** :

(89) $$\int_{z_0}^{h} dW = El\Delta L . \varepsilon_b \int_{z_0}^{h} \left[\frac{z}{\Delta L}(p + q_{z_0}) - \varepsilon_b\right] dz$$
$$= \frac{1}{2} El\varepsilon_b h^2 \frac{p^2}{(p + q_{z_0})}$$

L'énergie totale dissipée représentant quatre fois cette quantité il vient :

(90) $$\boxed{\Delta W = 2El h^2 \varepsilon_b \frac{p^2}{(p + q_{z_0})}}$$

On peut donc écrire $\Delta W = f(p)$ avec : $p = a - q_{z_0}$

- si $p \leq 0$: $f(p) = 0$
- si $p > 0$: $f(p) > 0$

IV,1.2. Calcul de l'énergie cinétique

Afin de pouvoir expliciter complètement le calcul, nous allons considérer que la partie non réduite de la poutre reste complètement rigide et, en ce cas, il a été vu dans le chapître II, paragraphe 2.1. que l'expression de l'énergie cinétique était :

$$2T = M \frac{L(L+\Delta L)}{3} \dot{q}_2^2$$

IV,1.3. Calcul du coefficient d'amortissement visqueux équivalent :

Son expression générale est :

(91) $$\nu = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\Delta W}{2T}$$

Les résultats exprimés dans les paragraphes IV,1.1. et IV,1.2. de ce chapître permettent d'écrire :

(92) $$\nu = \frac{3}{\pi} \cdot E \varepsilon_0 \cdot \frac{\ell h^2}{ML(L+\Delta L)} \cdot \frac{P^2}{(P+q_{2_0})\dot{q}_2^2}$$

IV,2. RESOLUTION DU PROBLEME DANS LE CAS OU LA LOI DE COMPORTEMENT NE DEPEND PAS DE LA VITESSE D'ALLONGEMENT :

IV,2.1. Notion de fibres microscopique et macroscopique :

Dans le cas d'un matériau dont la loi d'écrouissage est indépendante de la vitesse de déformation il sera pratique d'employer, comme R. MAZET [2] , la notion de fibre microscopique.

Une fibre macroscopique sera constituée d'un ensemble de fibres microscopiques donnant un échantillonnage complet de tous les seuils de fluage possiblesdes éléments microscopiques qui la constituent et que nous appellerons microfibres.

Tout ensemble compact de fibres microscopiques réunissant tous les seuils de fluage possiblesrencontrés dans la section sera une fibre macroscopique :

Le passage de l'étude de la fibre microscopique à celle de la fibre macroscopique nécessite l'introduction d'une fonction de distribution des seuils de fluage telle que :

La probabilité de trouver, dans une fibre macroscopique, une fibre microscopique dont le seuil de fluage, à vitesse nulle

soit compris entre ε_{M_i} et $\varepsilon_{M_i} + d\varepsilon_{M_i}$ soit posée égale à :

(93) $$dp = \Phi'(|\varepsilon_{M_i}|) \cdot d\varepsilon_{M_i}$$

La fonction Φ', ainsi que ses intégrales, sont des fonctions de modules, elles doivent en effet conserver la même valeur en traction ou en compression, ce sont des densités de probabilité de seuils et il sera admis qu'une fibre microscopique a même seuil en traction et en compression.

IV,2.2. Connaissance de la fonction Φ' et de ses intégrales :

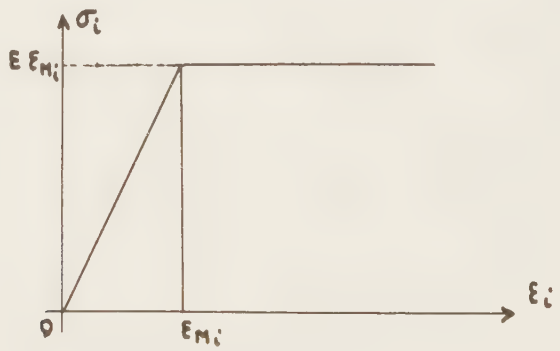
Les fonctions intégrales de $\Phi'(\varepsilon)$ sont définies comme suit :

(94) $$\Phi(\varepsilon) = \int_0^{\varepsilon} \Phi'(\alpha) \cdot d\alpha$$

(95) $$\Phi_i(\varepsilon) = \int_0^{\varepsilon} \Phi_{(i-1)}(\alpha) \cdot d\alpha$$ valable pour i entier ≥ 1 avec $\Phi_0 = \Phi$ pour $i \geq 1$

Ces intégrales peuvent être connues à partir d'un essai statique de traction simple sur éprouvette.

Considérons en effet une fibre microscopique de l'éprouvette de traction :



L'expression de la contrainte est la suivante :

(96) $$\frac{\sigma_i}{E} = \mathcal{Y}_{ch}(\varepsilon_i - \varepsilon_{M_i}) \cdot \varepsilon_{M_i} + \left[1 - \mathcal{Y}_{ch}(\varepsilon_i - \varepsilon_{M_i})\right] \varepsilon_i$$

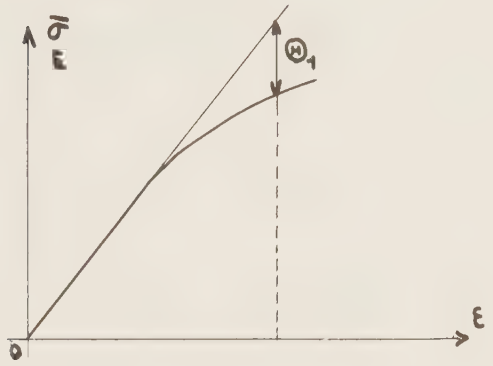
Une intégration à la fibre macroscopique représentera une mise en parallèle de modèles de HOFF, les seuils de fluage ε_{M_i} de chaque microfibre étant répartis suivant une loi de densité de probabilité $\Phi'(\varepsilon_{M_i})$ caractéristique du matériau à une température donnée (ici ambiante) :

Cette intégration donne :

(97) $$\frac{\bar{\sigma}}{E} = \int_0^{\infty} \frac{\sigma_i}{E} \, \Theta'(\varepsilon_{Mi}) \, . \, d\varepsilon_{Mi}$$

En sachant qu'en fluage établi : $\Theta(\varepsilon) = 1$ il vient :

(98) $$\boxed{\frac{\bar{\sigma}}{E} = \varepsilon - \Theta_1(\varepsilon)}$$



On suppose que, en cours de sollicitation, les microfibres constituant une macrofibre subissent le même allongement, ce qui permet d'assimiler une éprouvette de traction à une fibre macroscopique et de lui appliquer la loi précédemment trouvée :

Un essai de traction simple sur éprouvette cylindrique permettra le tracé de la courbe $\frac{\bar{\sigma}}{E} = \beta(\varepsilon)$ et d'en déduire la courbe $\Theta_1(\varepsilon)$ relative au matériau utilisé. Connaissant $\Theta_1(\varepsilon)$ il sera aisé d'en déduire par intégration les courbes $\Theta_2(\varepsilon)$ et $\Theta_3(\varepsilon)$ intervenant dans les résultats ultérieurs.

Le chapître précédent étudiait le cas du solide élastique parfaitement plastique où toutes les fibres composant la poutre de flexion avaient le même seuil de limite élastique ε_ρ .

L'étude maintenant abordée étant celle du corps réel avec seuils de fluage différents selon chaque fibre, la quantité ε_ρ devient une variable obéissant à la loi de densité de probabilité $\Theta'(\varepsilon_\rho)$, les résultats précédents ΔW ne sont maintenant valables que pour une valeur particulière de ε_ρ parmi toutes les valeurs possibles et il faudra, pour avoir le résultat intéressant la poutre réelle, faire leur moyenne par la méthode classique :

La valeur moyenne d'une grandeur X dépendant d'une variable aléatoire x , de densité de probabilité $\varphi(x)$ est :

(99) $$\bar{X} = \int \varphi(x) \cdot X \cdot dx .$$

avec ici : $\begin{cases} x = \varepsilon_\beta \\ X = dw(\varepsilon_\beta) \\ \varphi(x) = \Theta'(\varepsilon_\beta) \end{cases}$

IV,2.3. Calcul de l'énergie dissipée par cycle ΔW

Le chapître précédent donne le résultat relatif à une valeur de ε_β :

$$dw = 2E\ell h^2 \varepsilon_\beta \cdot \frac{p^2}{p + q_{2_0}}$$ qui, exprimé en fonction de la variable ε_β donne :

(100) $$dw = \frac{2E\ell h^2}{a}\left[a^2 \cdot \varepsilon_\beta - \frac{2a \cdot \Delta L}{h} \cdot \varepsilon_\beta^2 + \frac{\Delta L^2}{h^2} \varepsilon_\beta^3\right]$$

$\varepsilon_\beta = \frac{\gamma_0 a}{\Delta L}$ n'est susceptible de varier qu'entre les valeurs 0 et $\frac{ha}{\Delta L}$ conditionnées par les valeurs limites de γ_0 .

L'énergie dissipée par cycle pour la poutre réelle est :

(101) $$\Delta W = \int_0^{\frac{ha}{\Delta L}} dw_{(\varepsilon_\beta)} \cdot \Theta'_{(\varepsilon_\beta)} \cdot d\varepsilon_\beta$$

Soit :

(102) $$\boxed{\Delta W = 4E\ell h \Delta L\left[\Theta_2\left(\frac{ha}{\Delta L}\right) - \frac{3\Delta L}{ha}\,\Theta_3\left(\frac{ha}{\Delta L}\right)\right]}$$

IV,2.4. Calcul de l'énergie cinétique

Avec la même hypothèse que dans le paragraphe IV,1.2. il vient :

$$\boxed{2T = M\,\frac{L(L+\Delta L)}{3} \cdot \dot{q}_2^{\,2}}$$

IV,2.5. Calcul du coefficient d'amortissement visqueux équivalent :

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\Delta W}{2T}$$

soit :

(103)
$$\boxed{\nu = \frac{6}{\pi} \cdot E \cdot \frac{\rho h \Delta L}{ML(L+\Delta L)} \cdot \frac{\left[\Phi_2\left(\frac{hq}{\Delta L}\right) - \frac{3\Delta L}{hq}\Phi_3\left(\frac{hq}{\Delta L}\right)\right]}{\dot{q}_2^{\,2}}}$$

Chapitre V - COMPARAISON ENTRE PREVISION ET MESURE DE L'AMORTISSEMENT DU PREMIER MODE EN FLEXION D'UNE POUTRE CANTILEVER

L'objet de ce chapître est de relater les résultats d'une série d'essais statiques destinés à vérifier les méthodes de prévision exposées dans les chapîtres précédents. Les essais ont été effectués sur une poutre cantilever, amincie au voisinage de l'encastrement, de façon que la région fluante soit bien localisée et que son rayon de courbure puisse être considéré comme constant. La poutre, dans un but de simplification, a été construite dans un matériau (acier XC 18) dont le comportement, pour les allongements considérés, était très sensiblement celui d'un corps "élastique parfaitement plastique".

La loi contrainte-déformation de traction permettant théoriquement, comme nous l'avons vu, la prévision de l'énergie dissipée par cycle en statique et en dynamique, les essais effectués ont eu pour but de vérifier que cette prévision était correcte, et que l'on pouvait, par conséquent négliger, dans ce type de problème, l'influence des vitesses de déformation.

Une première série d'essais a permis, sur éprouvette de traction, la détermination de la loi contrainte-déformation quasi statique du matériau et en particulier du module d'Young E et du seuil de fluage ε_4 seuls nécessaires à la qualification d'un corps élastique parfaitement plastique. Dans une seconde série d'essais effectués cette fois sur la poutre, celle-ci a été soumise à des cycles quasi statiques de flexion pour lesquels l'énergie fournie (proportionnelle à l'aire du cycle) a été mesurée en fonction de l'amplitude et comparée à celle prévue par la théorie.

Dans une dernière série d'essais, la poutre a été excitée sur son premier mode de flexion à une fréquence de 56 Hz. L'énergie dissipée a été mesurée de deux manières : soit par l'amortissement visqueux équivalent, soit par une mesure directe de l'énergie fournie au système à la

résonance. Cette énergie dissipée par cycle, fonction de l'amplitude, a été comparée à l'énergie prévue par la théorie et à l'énergie mesurée en cycles quasi statiques.

La comparaison a donné de bons résultats et légitime à postériori la simplification que nous avions effectuée à l'étude des vibrations d'une poutre dont l'allongement des fibres, lors des oscillations, dépasse de part et d'autre la limite élastique.

V,1. MATERIEL D ' ESSAIS :

V,1.1. Eprouvette d'essai :

C'est une éprouvette de flexion en acier XC 18 trempé et revenu, dont les formes et dimensions sont indiquées dans la figure (1). La partie amincie devant permettre une meilleure localisation des contraintes présentait, dans une toute première série d'expériences, des angles vifs à la jonction des sections de la tranche amincie et de la partie non modifiée ; ceci ne présentait aucun inconvénient pour les essais statiques, mais en revanche il n'était pas possible de mener à bien des essais de vibrations ; une rupture par fatigue au droit des angles vifs survenant au bout d'un temps de vibrations très court et ne permettant pas, d'autre part, d'atteindre des amplitudes suffisantes pour pouvoir effectuer une confrontation valable des résultats expérimentaux dynamiques avec les résultats expérimentaux statiques et théoriques. Les expériences dont il est question dans ce travail ont été faites avec des éprouvettes présentant des arrondis aux jonctions des sections, tel que le montre la figure (1).

Comme nous l'avons déjà dit, le matériau constituant l'éprouvette d'essai est de l'acier XC 18 trempé et revenu. Deux éprouvettes cylindriques de traction, tirées du même barreau utilisé pour l'usinage de l'éprouvette de flexion, ont été sollicitées à l'aide de la machine de traction universelle M. A. N. et ont permis le tracé de la courbe contrainte-déformation du matériau.

V,1.2. Appareils de lecture pour les essais statiques :

Ce sont des comparateurs :

a - Deux comparateurs au centième de millimètre, à longue course (25 mm).

b - Un comparateur au centième de millimètre, de 10 mm de course (Malicet-Blin).

V,1.3. Application de la charge pour les essais statiques :

La charge est appliquée à l'aide de poids étalonnés au préalable.

V,1.4. Appareil d'excitation pour les essais dynamiques :

Il s'agit d'un excitateur à large entrefer dont le coefficient d'étalonnage déterminé immédiatement avant la série d'essais dynamiques est 13,5 Newtons par Ampère continu.

V,1.5. Appareils de détection pour les essais dynamiques :

a - Un capteur de vitesse type PRODERA dit "capteur accordé" en raison d'un réglage à la fréquence de résonance de la structure étudiée permettant d'éliminer toute raideur parasite.
Coefficient d'étalonnage : 0,378 ms/V_{ef}

b - Un capteur de vitesse à large entrefer, de coefficient d'étalonnage : 6,68 $mV_{ef}/mm\,s$

V,1.6. Appareils de lecture :

a - Un générateur Krohn-Hite : "Model 440 A", allant de 0,01 Hz à 100 kHz.

b - Un fréquencemètre Rochar : type A 477

c - Un oscilloscope TEKTRONIX : type 502 A

d - Deux amplificateurs Philips : GM 5535

e - Deux voltmètres alternatifs Philips : GM 6012

f - Un voltmètre alternatif Philips : GM 6015

g - Un voltmètre continu Philips : GM 6020

h - Un voltmètre Rochar : A 1176 B

i - Un multiplieur fabriqué à l'O.N.E.R.A.

V,2. DETERMINATION DE LA COURBE D'ECROUISSAGE :

Les essais d'écrouissage ont été faits à de très faibles vitesses et peuvent être considérés comme des essais statiques.

On voit, sur la courbe d'écrouissage (fig 2), apparaître très distinctement la limite élastique, pour laquelle se produit une discontinuité de pente parfaitement nette.

Pour $\varepsilon_A < \varepsilon < 2.10^{-2}$, la courbe d'écrouissage peut être assimilée à une droite de très faible pente, ce qui justifie

pour notre étude l'assimilation du corps réel à un corps élastique parfaitement plastique. La partie suivante de la courbe d'écrouissage ($\varepsilon > 2.10^{-2}$) n'est en effet atteinte par aucune fibre de la poutre au cours de nos essais.

La valeur du seuil d'écrouissage ε_A , mesurée lors des essais, est : $\varepsilon_A = 1,51.10^{-3}$

V,3. ESSAIS STATIQUES :

V,3.1. But :

Ils ont pour but de vérifier que la prise en considération de cycles fondés sur la notion d'écrouissage est valable. Si les mesures de l'énergie dissipée correspondent bien aux prévisions théoriques, on aura vérifié d'autre part que les notions de fibres et de section fluante bien délimitée gardent un sens.

V,3.2. Dispositif expérimental :

Un schéma de principe du dispositif est donné dans la figure (3).

A l'une de ses extrémités la poutre est encastrée rigidement dans un bloc métallique prévu à cet effet. Des essais précis ont permis de montrer qu'il n'existait aucun entraînement du bâti d'encastrement lors des essais statique ou dynamique.

De l'extrémité libre de la poutre partent deux filins d'acier qui, à l'aide d'une poulie, permettent l'application de charges, alternativement dans un sens, ou dans l'autre, à l'aide de plateaux disposés à l'extrémité de ces filins.

Un cycle de déformation est obtenu en chargeant progressivement, kilogramme par kilogramme, l'un des plateaux, jusqu'à une valeur maximum choisie, puis en déchargeant progressivement ce même plateau pour ensuite recommencer la même opération sur l'autre plateau. La même opération répétée avec des charges maximum variables permet l'obtention de toute une série de cycles de déformation.

La figure (4) montre la disposition des comparateurs de lecture de déformées.

Sont lus :

- la flèche en un point proche de l'extrémité de la poutre

- le déplacement accusé par un point d'une barrette de duralumin fixée par collage à l'aplomb de la section délimitant les parties amincie et non amincie de la poutre. Il est à noter à ce sujet que, si la barrette est fixée sur la face libre de la poutre

au droit de la section fluante et non sur la poutre à l'aplomb de cette section, des erreurs importantes sont relevées. La section terminale de la poutre au niveau de la section fluante subit donc une torsion.

Une lecture des deux paramètres (flèche d'extrémité et déplacement de la barrette) est effectuée à chaque application nouvelle de charge.

Le processus de charge et décharge progressives dont il a été précédemment question est, pour une charge maximum imposée, répété plusieurs fois avant de relever les valeurs lues aux comparateurs pour un cycle complet car il a été observé qu'un cycle fermé, pratiquement parfait, est une limite asymptotique de cycles moins corrects obtenus au cours de charges et décharges répétées préalablement plusieurs fois.

V,3.3. Dépouillement des résultats :

Chaque poids P appliqué permet le calcul du mouvement M introduit dans la section d'abscisse $x = \Delta L$.

La lecture correspondante, au comparateur θ , permet de déterminer la rotation q_2 de cette section privilégiée.

Les comparateurs d'extrémité permettent, par lecture directe, d'exprimer la flèche $\delta\ell$ en bout de poutre.

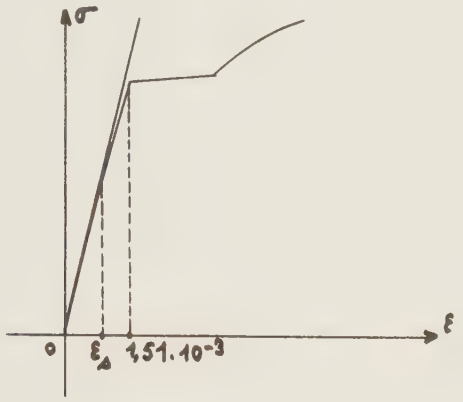
Des cycles de déformation sont alors tracés dans des axes (M, q_2) ou $(P, \delta\ell)$; l'énergie dissipée par cycle est ensuite déterminée à partir de la mesure de l'aire de ces cycles. Enfin la mesure de l'aire des différents cycles obtenus à partir des charges maximum permet le tracé d'une courbe d'énergie dissipée par cycle en fonction de l'amplitude $|\alpha|$ de rotation de la section d'abscisse $x = \Delta L$. Cette courbe est comparée à la courbe similaire obtenue à partir de la formule théorique ; l'examen des tableaux (I) et (II) ainsi que des courbes correspondantes sur la figure (15) laisse voir une concordance relativement bonne entre la théorie et l'expérience. Les divergences cependant observées lors de l'examen des courbes peuvent être attribuées à deux causes différentes. La première de ces causes peut être une légère erreur dans la détermination de la courbe théorique de l'énergie dissipée par cycle $\Delta W_{th}(|\alpha|)$: cette courbe a été construite à partir de la formule théorique :

$$\Delta W_{th} = 2E\ell h^2 \varepsilon_\Delta \frac{p^2}{p + q_{2_0}} \qquad \text{dans laquelle} \quad p = \alpha - q_{2_0} \qquad (86)$$

avec $$q_{2_0} = \frac{\varepsilon_\Delta \Delta L}{h} \qquad (82)$$

(90)

La quantité ε_Δ est déterminée à partir de la courbe d'écrouissage (fig 2) et trouvée égale à $1{,}51.10^{-3}$, en fait cette valeur de ε_Δ n'est pas discernable avec précision, car l'évolution dans le domaine élastique qui peut paraître traduite par une droite rigoureuse est plus réellement représentée par une courbe cessant d'être rectiligne à un moment non repérable, mais pour lequel la valeur de ε_Δ est inférieure à celle que nous avons utilisée.



La courbe $\Delta W_{th}(|a|)$ donne ainsi une énergie nulle pour une valeur de $|a|$ très probablement inférieure à celle qui est lisible sur la figure (15), ce qui rendrait l'erreur toujours du même signe entre les valeurs de l'énergie expérimentale statique et les valeurs de l'énergie théorique, sans pour celà que cette valeur de l'énergie théorique soit augmentée pour une même valeur de $|a|$. En effet une diminution éventuelle de ε_Δ entraînerait une augmentation de ΔW_{th} par l'intermédiaire de son terme $p^2 = (a - q_{t_0})^2$ (formule 90), mais la longueur ΔL de la tranche fluante, ayant été prise à pieds d'arrondis reliant cette partie aux deux zones rigides (voir figure 1), n'est pas non plus une donnée connue avec précision ; il n'est pas interdit de la considérer comme comprise entre 20 mm et 26 mm (voir figure 1). Finalement les marges d'erreurs sur la détermination des deux facteurs ε_Δ et ΔL peuvent très bien amener la courbe $\Delta W_{th}(|a|)$ à avoir une abscisse $|a|$ à l'origine plus faible sans pour cela que ses ordonnées se trouvent sensiblement augmentées. L'erreur entre les valeurs de l'énergie expérimentale statique et les valeurs de l'énergie théorique serait alors toujours du même signe, contrairement à ce qui apparaît dans l'examen des courbes correspondantes de la figure 15.

Le fait, alors, que l'énergie dissipée théorique soit supérieure à l'énergie dissipée expérimentale peut être expliqué

par les difficultés rencontrées lors de tout essai statique, en particulier dans les zones voisines de l'encastrement en raison de seuils de glissement non franchis. L'énergie dissipée mesurée est, en effet, dans ce cas toujours trop faible.

V,3.4. Observations :

La mesure des rotations q_2 doit être effectuée avec un maximum de précision, car une erreur de quelques minutes d'angle peut conduire à une totale discordance entre les résultats expérimentaux et les résultats théoriques.

A cet effet il a été vérifié que l'encastrement ne subissait aucune rotation sous l'effet des charges appliquées. Il a été vérifié également que la barrette de duralumin permettant la mesure des rotations était suffisamment rigide pour ne pas subir une flexion sous la pression de la touche du comparateur qui en mesurait les déplacements, et que la fixation de cette barrette était suffisamment correcte pour assurer une bonne fidélité des mesures.

Enfin, lorsque la poutre décrit un cycle fermé, il a été vérifié que les énergies trouvées à partir des cycles tracés en axes (M, q_2) ou en axes $(P, \delta\ell)$ étaient pratiquement les mêmes. Tous les résultats ont été exprimés à partir des cycles tracés en axes (M, q_2), il est en effet préférable d'utiliser la mesure de la rotation dans la détermination expérimentale des résultats puisqu'elle intervient directement dans la théorie.

V,4. ESSAIS DYNAMIQUES :

V,4.1. But :

Les essais dynamiques étaient destinés à vérifier l'hypothèse fondamentale de la théorie exposée, à savoir que la dissipation d'énergie dûe à la seule irréversibilité permettait une prévision correcte de l'amortissement de flexion du premier mode de la poutre.

V,4.2. Dispositif expérimental :

La figure (6) fournit un schéma de la chaîne de mesure des essais dynamiques, et les figures (7) et (8) montrent la disposition de l'excitateur et des deux capteurs de vitesse.

Le signal "force" envoyé dans l'excitateur est réglé en fonction de l'amplitude de vibration désirée en bout de la poutre (ou en fonction de la rotation désirée dans la section $x = \Delta L$, ce qui revient au même) ; pour chaque point de mesure on se

place à la fréquence de résonance qui est voisine de 56 Hz, cette fréquence est obtenue par observation du lissajous à l'oscilloscope et confirmée par l'examen des courbes de résonance. Sont alors lûes les quantités : fréquence de résonance, signaux donnés par le capteur d'extrémité de la poutre et le capteur fixé sur la barrette, le signal force, et le signal donné par un voltmètre continu à la sortie d'un multiplieur permettant d'en déduire une puissance moyenne et, par conséquent, l'énergie dissipée par cycle du système à la fréquence de résonance au point de mesure considéré. Le multiplieur reçoit les signaux : "force", envoyé dans l'excitateur, et "vitesse", sortant du capteur d'extrémité de la poutre.

Les rotations mesurées dans la section limite de la tranche fluante correspondent, pour les amplitudes maximales, à des allongements relatifs des fibres extrêmes égaux à trois fois la limite élastique, ce qui montre que le domaine de limite élastique a bien été dépassé au cours des essais.

L'amortissement visqueux équivalent est mesuré d'une part par l'énergie relevée à la résonance, d'autre part par l'examen de la courbe de résonance.

Une détermination de la masse généralisée μ de la poutre est nécessaire pour les calculs ultérieurs de l'amortissement visqueux équivalent. A cette fin la fréquence de résonance de la poutre non chargée est d'abord relevée (ω_0 est la pulsation correspondante). De faibles surcharges additionnelles $d\mu$ (de 5 g en 5 g et n'excédant pas 40 g) sont ensuite fixées à l'extrémité de la poutre au voisinage immédiat de l'excitateur et du capteur d'extrémité et, pour chaque surcharge, la nouvelle fréquence de résonance est relevée (ω est la pulsation correspondante). Un tracé de la droite $d\mu = g(d\omega)$ (avec $d\omega = \omega - \omega_0$) permet d'avoir la valeur du coefficient angulaire $\frac{d\mu}{d\omega}$ qui, reporté dans la formule

$$\mu = -\frac{\omega_0}{2} \cdot \frac{d\mu}{d\omega}$$

permet d'obtenir la valeur μ de la masse généralisée de la poutre (fig 17).

Pour obtenir une valeur correcte de μ il est nécessaire de répéter deux ou trois fois une telle série de mesures et de veiller à ce que les surcharges soient fixées rigidement à l'extrémité de la poutre.

V,4.3. Dépouillement des résultats :

Le signal lu à partir du capteur fixé sur la barrette de duralumin permet la détermination de la rotation q_2 de la section d'abscisse $x = \Delta L$. Si nous appelons :

V_b : le signal du voltmètre alternatif à la sortie du capteur fixé sur la barrette,

k_b : le coefficient d'étalonnage de ce dernier capteur (0,378 ms/Vef),

ω_o : la pulsation de résonance pour l'essai considéré,

b : le bras de levier représentant la distance entre le point d'application du capteur sur la barrette et la fibre neutre de la poutre (41 mm),

il vient :

$$q_2 = \frac{k_b . V_b}{\omega_o . b}$$

Le signal lu au voltmètre à la sortie du multiplieur permet la détermination immédiate de la puissance moyenne, une fois déterminé le coefficient d'étalonnage de ce multiplieur.

Si l'on appelle :

C_v : le signal lû au voltmètre continu,

k_m : le coefficient de passage du signal C_v à la puissance P_m (k_m variant avec la position des diviseurs de tension du multiplieur).

il vient :

$$C_v = k_m . P_m \qquad \text{soit} \qquad P_m = \frac{C_v}{k_m}$$

Si T_o désigne exceptionnellement ici la période de résonance pour l'essai considéré, l'énergie dissipée par cycle est :

(104) $$\underline{\Delta W_d = P_m . T_o}$$

ΔW_d étant l'énergie dissipée obtenue à partir des essais dynamiques.

Pour chaque amplitude de vibration les deux quantités q_2 et ΔW_d sont calculées et permettent le tracé d'une courbe $\Delta W_d = f(|\alpha|)$ (q_2 est la rotation courante de la section limite de la tranche fluante, et $|\alpha|$ est la valeur maximum de q_2 en valeur absolue ; la vibration étant symétrique les valeurs maximales de q_2 seront $\pm\alpha$).

Cette courbe $\Delta W_d = f(|\alpha|)$ est confrontée avec les courbes analogues déjà connues provenant des essais statiques et de la théorie. On note une très bonne concordance avec la courbe théorique pour des valeurs de "α" supérieures à 8.10^{-3} radians, la concordance avec les essais statiques est également très satisfai-

sante, ces résultats étant lus dans les tableaux III et IV et sur la figure (15). Pour $|a|$ inférieur à 6.10^{-3} radians la théorie ne prévoit aucune dissipation. Or une dissipation lègère apparait lors des essais. L'analyse des erreurs possibles sur le tracé de la courbe théorique, exposée à la fin du paragraphe V,3.3. de ce même chapître, justifie également ici la divergence trouvée pour $|a|$ inférieur à 6.10^{-3} radians entre les résultats théoriques et les résultats expérimentaux dynamiques. Pour $|a|$ inférieur à 7.10^{-3} radians il a été vérifié numériquement que la dissipation avait, sans grande erreur, une loi parabolique en fonction de l'amplitude correspondant à la dissipation visco-élastique normale ΔW_{ve} du matériau exprimée par la loi :

(105) $$\Delta W_{ve} = \pi \beta \omega y^2$$

y est la flèche en extrémité de poutre, directement proportionnelle aux amplitudes $|a|$ de rotation (voir tableaux III et IV).

β est le coefficient d'amortissement du dashpot figurant la dissipation visco-élastique ΔW_{ve}.

A partir de 7.10^{-3} radians la loi expérimentale est peu différente de la loi cubique prévue, les différences pouvant s'expliquer par une erreur dans la détermination de la limite élastique ε_A dont nous avons déjà parlé. Ces propriétés sont aussi obtenues lors de l'examen de la courbe d'amortissement en fonction de l'amplitude (fig16) : l'examen de la courbe expérimentale de l'amortissement ν en fonction de $|a|$ laisse voir une partie sensiblement rectiligne et horizontale jusqu'à une valeur de $|a|$ égale à 5.10^{-3} radians, traduisant ainsi un comportement élastique, alors que la courbe théorique semble vouloir couper l'axe des abscisses dans une zone voisine de cette même valeur, ce qui semblerait confirmer la valeur des hypothèses faites sur les erreurs possibles dans la détermination de ε_A et de ΔL (paragraphe V,3.3.).

Note :

Sur la figure (16) le point expérimental pour lequel :

$$\nu = 5{,}4\,‰$$
$$|a| = 1{,}28.10^{-3}\ \text{rad}$$

a été obtenu au cours d'un essai élastique à très faible amplitude, antérieur à la série d'essais dynamiques ayant donné lieu à la suite de la courbe.

V,5. RESULTATS EXPERIMENTAUX :

V,5.1. Essais statiques :

Les résultats sont donnés dans les tableaux I et II. Certains cycles, à différente charge maximum, sont représentés sur les figures (9) (10) (11) (12) (13) et (14).

Les courbes $\Delta W = f(|a|_M)$ obtenues, d'une part à partir de chacune des deux séries d'essais statiques et d'autre part à partir de la formule théorique établie dans le chapître IV sont tracées sur la figure (15).

V,5.2. Essais dynamiques :

Les résultats en sont donnés dans les tableaux III et IV. Le tableau IV donne la valeur de l'amortissement visqueux équivalent pour les divers points de mesure.

L'amortissement a été calculé de deux manières :

a - <u>à partir de la mesure de puissance moyenne à la résonance</u>

(106) $$\nu_{exp} = \frac{F^2}{4 \mu \omega_0 P_m}$$

μ : masse généralisée de la poutre

ω_0 : pulsation de résonance

F : force communiquée à la structure à la résonance

P_m : puissance moyenne à la résonance, obtenue par lecture d'un signal sur un voltmètre continu placé à la sortie d'un multiplieur qui recevait le signal force envoyé dans l'excitateur situé en bout de poutre, et le signal vitesse issu du capteur de vitesse situé à l'aplomb de l'excitateur. L'obtention de la valeur de P_m à partir de la lecture au voltmètre continu est expliquée dans le paragraphe V,4.3.

La connaissance de la valeur de la puissance moyenne P_m permettait d'obtenir directement la valeur de l'énergie ΔW_d correspondante pour chaque amplitude de rotation, et par suite de tracer la courbe $\Delta W_d(|a|)$ (figure 15). Mais la valeur de ν_{exp} aurait pu être déterminée à partir d'une lecture des facteurs force F et flèche en bout de poutre y ; à partir de ces deux quantités l'expression (106) de ν devient :

(107) $$\nu_{exp} = \frac{F}{2 \mu \omega_0^2 y}$$

Le tableau ci-joint donne les valeurs de ν_{exp} calculé à partir de ces deux formules en fonction de l'amplitude de rotation $|a|$, et l'on constatera que les résultats sont les mêmes avec une erreur moyenne inférieure à 1%.

$\|a\|$ rad	$4{,}07.10^{-3}$	$5{,}93.10^{-3}$	$6{,}57.10^{-3}$	$7{,}30.10^{-3}$	$7{,}97.10^{-3}$	$9{,}26.10^{-3}$	$9{,}99.10^{-3}$	$10{,}42.10^{-3}$	$10{,}86.10^{-3}$
$\nu_{exp} = \frac{F^2}{4\mu\omega_0 P_m}$	5,96 ‰	7,46 ‰	8,07 ‰	9,56 ‰	11,67 ‰	15,72 ‰	19,57 ‰	23,63 ‰	27,27 ‰
$\nu_{exp} = \frac{F}{2\mu\omega_0^2 y}$	5,97 ‰	7,46 ‰	8,09 ‰	9,55 ‰	11,68 ‰	15,3 ‰	19,23 ‰	23,60 ‰	27,16 ‰

b - <u>à partir des valeurs de l'énergie dissipée théorique</u> par cycle correspondant à la valeur de l'amplitude $|a|_{radians}$ pour chaque point de mesure des essais dynamiques :

(108) $$\nu_{th} = \frac{\Delta W_{th}}{4\pi W_0}$$

W_0 représentant l'énergie de la vibration entretenue

$$W_0 = \frac{1}{2}\mu\omega_0^2 y^2$$

Si y est l'amplitude maximum de la flèche en bout de poutre obtenue à partir du signal donné par le capteur de vitesse en extrémité de poutre.

(109) $$\nu_{th} = \frac{\Delta W_{th}}{2\pi\mu\omega_0^2 y^2}$$

La courbe $\Delta W_d = g(|a|_{rd})$ obtenue à partir de la série d'essais dynamiques par la mesure de puissance P_m à la résonance (voir paragraphe V,4.3.) est portée sur la figure (15).

Les courbes d'amortissement expérimental obtenu par la formule (106) et théorique obtenu par la formule (109) sont portées sur la figure (16).

<u>Note :</u>

Tous les résultats figurant dans les tableaux I, II, III, et IV sont exprimés dans le système MKS, avec les fréquences en Hertz et les angles en radians. -

V,6. REMARQUES SUR LES RESULTATS :

Pour l'énergie dissipée par cycle en fonction de la demi amplitude de rotation la concordance est assez bonne entre les résultats donnés par les essais dynamiques et la prévision théorique : le pourcentage moyen d'erreur est de l'ordre de 8%. La concordance est moins bonne entre les résultats donnés par les essais statiques et la théorie où le pourcentage d'erreur est de l'ordre de 18% pour la première série d'essais et de 12% pour la seconde série. Le pourcentage d'erreur entre les valeurs de ν_{exp} et de ν_{th} est de l'ordre de 6%.

Pour les faibles valeurs de $|\alpha|$ (inférieures à 8.10^{-3} radians) la concordance est mauvaise par les raisons probables qui ont été envisagées précédemment, aussi bien en ce qui concerne les courbes d'énergie dissipée que les courbes d'amortissement.

Il n'est en revanche pas anormal, toujours dans le domaine des faibles rotations $|\alpha|$, de trouver pour les essais dynamiques une énergie dissipée supérieure à celle qui est donnée par la théorie en raison de l'amortissement visco-élastique du matériau, c'est pourquoi pour $|\alpha|$ inférieur à 8.10^{-3} radians les pourcentages d'erreur ne sont pas indiqués dans le tableau III car on ne peut pas considérer ces écarts entre ΔW expérimental et ΔW théorique comme une erreur, mais plutôt comme un fait physiquement justifié.

Il est à noter que, sur une même éprouvette, deux séries d'essais statiques, identiques, donnent des résultats différents, ce qui montre que le tracé d'une courbe $\Delta W = f(|\alpha|_M)$ issue d'une série d'essais statiques dépend beaucoup de l'état d'écrouissage du matériau, au moment où l'on commence à solliciter l'éprouvette et, peut être, de la température lors de l'essai. Cette remarque explique pourquoi il serait illusoire d'espérer trouver une concordance rigoureuse entre les résultats d'essais statiques, dynamiques et la théorie.

Plusieurs séries d'essais statiques, sur diverses éprouvettes présentant des états d'écrouissage différents, ont montré que les résultats les plus corrects sont obtenus à partir d'une éprouvette préalablement écrouie assez longtemps avant l'essai ; ceci a été réalisé pour l'éprouvette ayant servi aux essais dont il est question dans ce rapport.

Dans des essais ultérieurs il serait utile de chercher à évaluer la dissipation d'énergie dans l'encastrement, ce qui permettrait sans doute d'obtenir une meilleure correspondance entre les résultats théoriques et les résultats d'essais.

C O N C L U S I O N

Le travail présenté dans cette thése a permis de vérifier d'une manière assez satisfaisante que l'amortissement des modes de flexion d'une poutre qui vibre symétriquement en dépassant de part et d'autre la limite élastique, peut être prévu en admettant que la dissipation d'énergie est dûe essentiellement à l'irréversibilité du matériau dans le domaine plastique. Le calcul de prévision est effectué, après examen de la courbe d'écrouissage statique, à partir du tracé des cycles d'évolution des fibres les plus exposées. La notion de décharge élastique permet le calcul effectif de ces cycles. Malgré des pourcentages relativement importants d'erreurs, la confirmation expérimentale de la théorie semble acquise. De nombreux perfectionnements seraient sans aucun doute nécessaires pour obtenir une confirmation plus précise.

Il est nécessaire de rappeler que théorie et expérience concernent une poutre dont la tranche voisine de l'encastrement avait été amincie, sollicitée à la température ambiante. Rien ne permet d'assurer que les hypothèses de départ auraient été aussi bien vérifiées pour un matériau évoluant à des températures plus élevées. Des études ultérieures permettraient seules de préciser ce point.

Il est bien certain qu'il ne s'agit ici que d'un "coup de sonde". Si l'on s'intéressait par exemple aux problèmes posés lors du départ de silo d'un missile, ce sont les vibrations de coques, dont des éléments entreraient périodiquement dans le domaine plastique, qui devraient être étudiées ; le problème ne serait plus linéaire mais bidimensionnel.

Il semble cependant que l'étude permette d'admettre que, même dans ce cas, les vitesses de déformation pourraient être négligées dans la prévision de l'amortissement, tout au moins lorsque les températures ne dépassent pas certaines limites.

B I B L I O G R A P H I E

[1] FINNIE L and HELLER W. R. - Creep of Engineering Materials
Mac Graw Hill Book Company, Inc - 1959

[2] MAZET R. - Sur la représentation dynamique d'une structure lamellaire soumise à une charge qui provoque un fluage localisé.
Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. t 256, p 2971 - 2975

[3] HOFF N. J. - Les fondements de la mécanique du fluage dans un corps métallique.
Résumé d'un cours fait à l'Institut Henri POINCARE. Octobre - Décembre 1964.

[4] MAZET R. - Mécanique vibratoire
Edition Béranger - 1955.

[5] GERMAIN P. - Mécanique des milieux continus
Masson et Cie Editeurs - 1962.

[6] MANDEL M. - Cours de Mécanique
Ecole Polytechnique 1964 - 1965.

[7] MAZET R. - Sur un modèle apte à traduire le fluage sous charge constante des structures.
Creep in Structures, Springer Verlag, Berlin, 1962, p 326 - 338.

[8] LEMAITRE J. - Une méthode semi expérimentale de calcul des déformations évolutives d'une structure sollicitée dans le domaine plastique.
Communication présentée à la deuxième conférence internationale d' Analyse des Contraintes Paris : Avril 1962.

[9] LAZAN B.J. - Energy dissipation, Mechanisms in Structures with particular Réference to Material Damping.
"Structural Damping" - section one -
Edited by J. E. Ruzicka.

[10] PLUNKETT R. - Measurement of Damping.
"Structural Damping" - section five.
Edited by J. E. Ruzicka.

[11] HOFF N. J. - Rapid Creep in Structures.
Journal of the Aeronautical Sciences.
Vol. 22 - N° 10 - Octobre 1955.

[12] TIMOSHENKO S. - Théorie de l'Elasticité.
Librairie Polytechnique Ch. Béranger - 1948.
Traduit sur la première édition anglaise revue et corrigée par l'auteur par A. De Riva Berni.

[13] TIMOSHENKO S. - Théorie des plaques et des coques.
Librairie Polytechnique Ch. Béranger - 1961.
Traduit d'après la deuxième édition américaine chez Mac Graw Hill Book Company, Inc.

Achevé d'imprimer à l'O.N.E.R.A., Février 1966 - Dépôt légal 1er trimestre 1966 - n° 251.

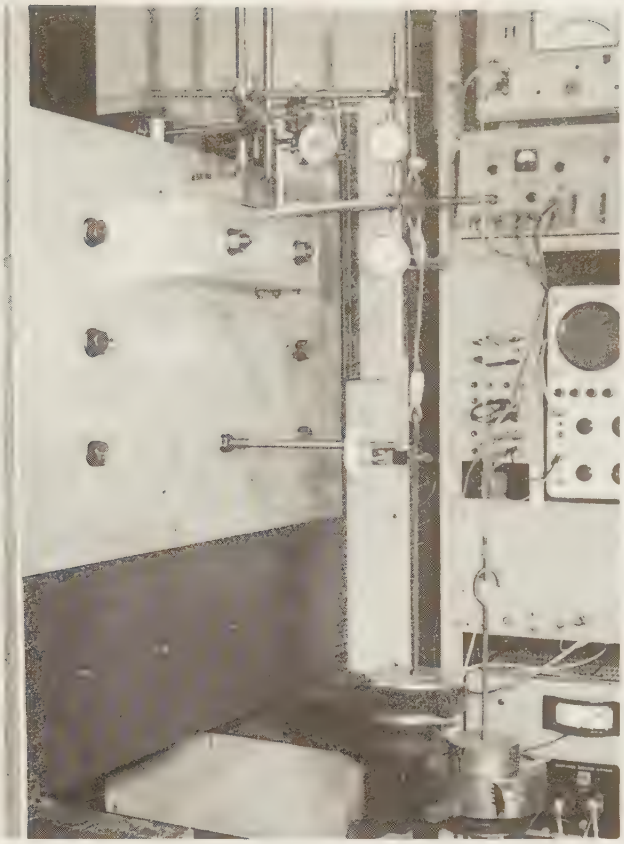


Photo 1 - Dispositif pour les essais statiques.

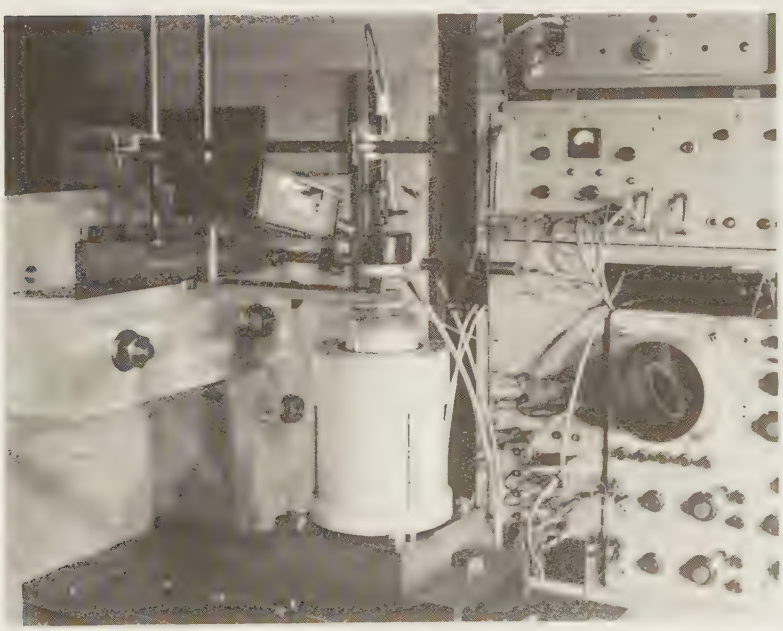


Photo 2 - Détail de montage pour les essais dynamiques.

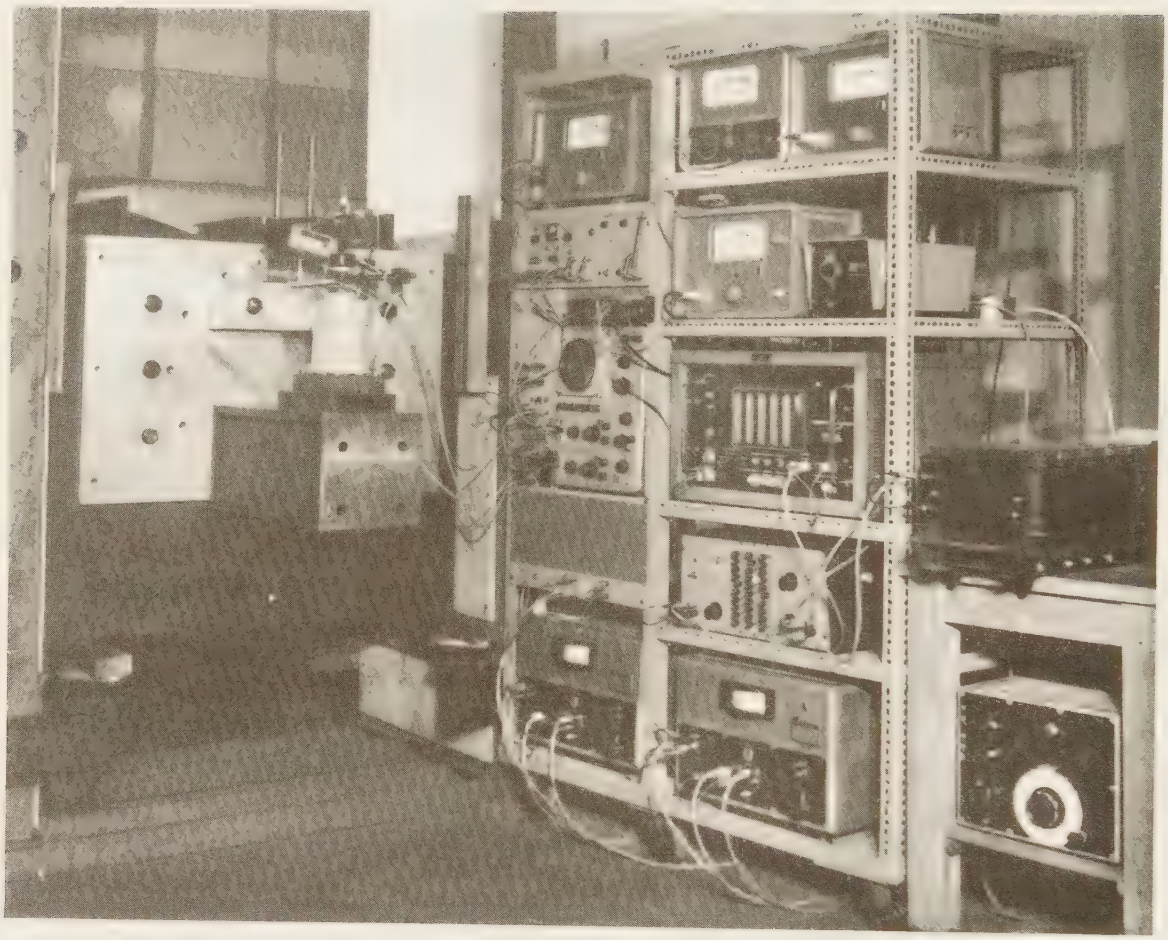
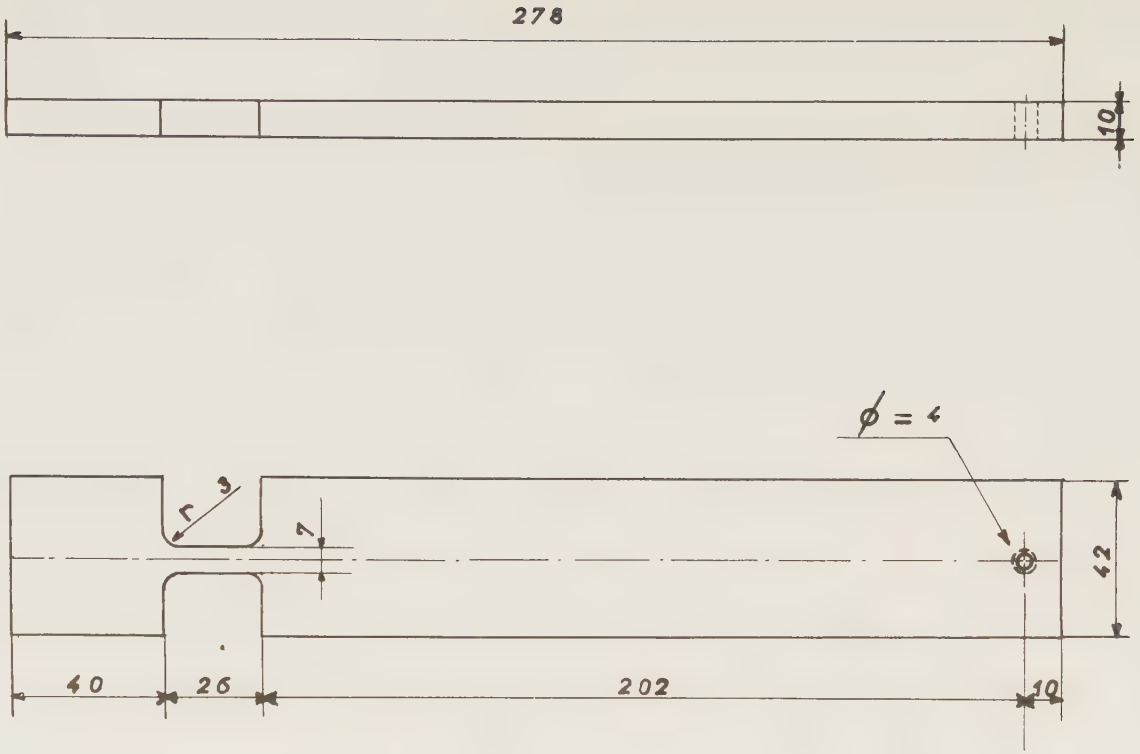


Photo 3 - Vue générale de l'installation d'essais dynamiques.



POUTRE de FLEXION

Echelle 1/2

Fig 1

Acier XC 18

Courbe CONTRAINTE DEFORMATION
d'un acier XC 18
σ kg/mm²
40
30
20
10
0
2
4
6
ε %

Fig 2

SCHEMA de MONTAGE des ESSAIS STATIQUES

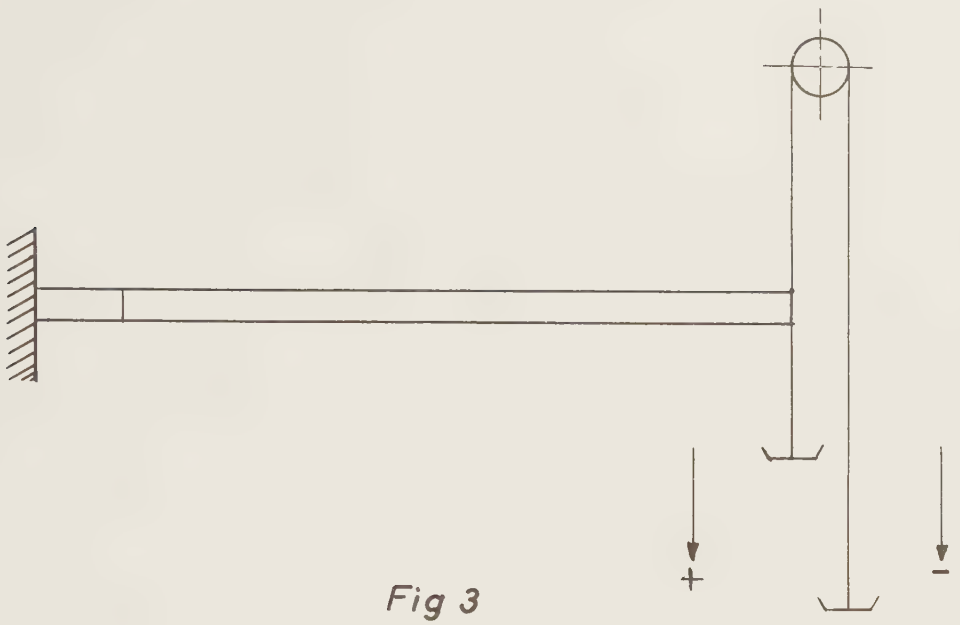


Fig 3

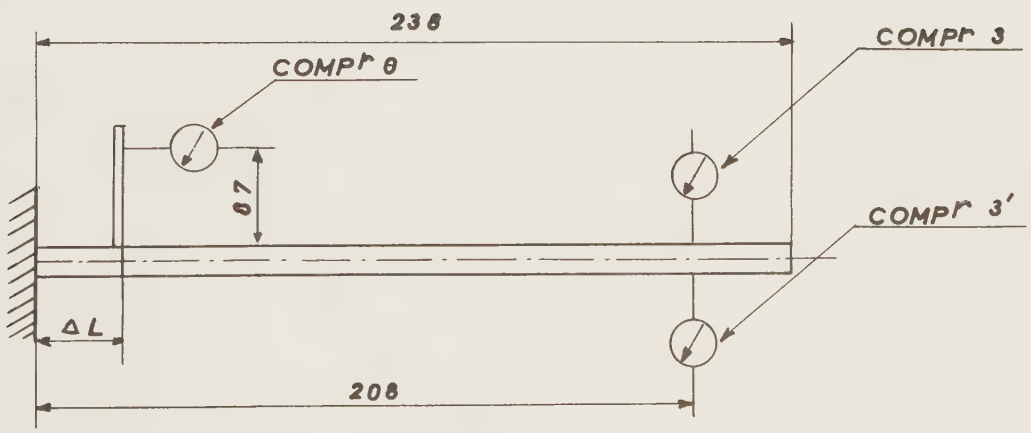


Fig 4

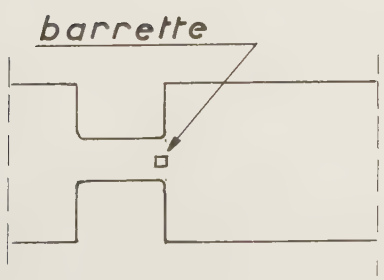


Fig 5

SCHEMA Sinoptique
de la chaine de mesures
des essais DYNAMIQUES

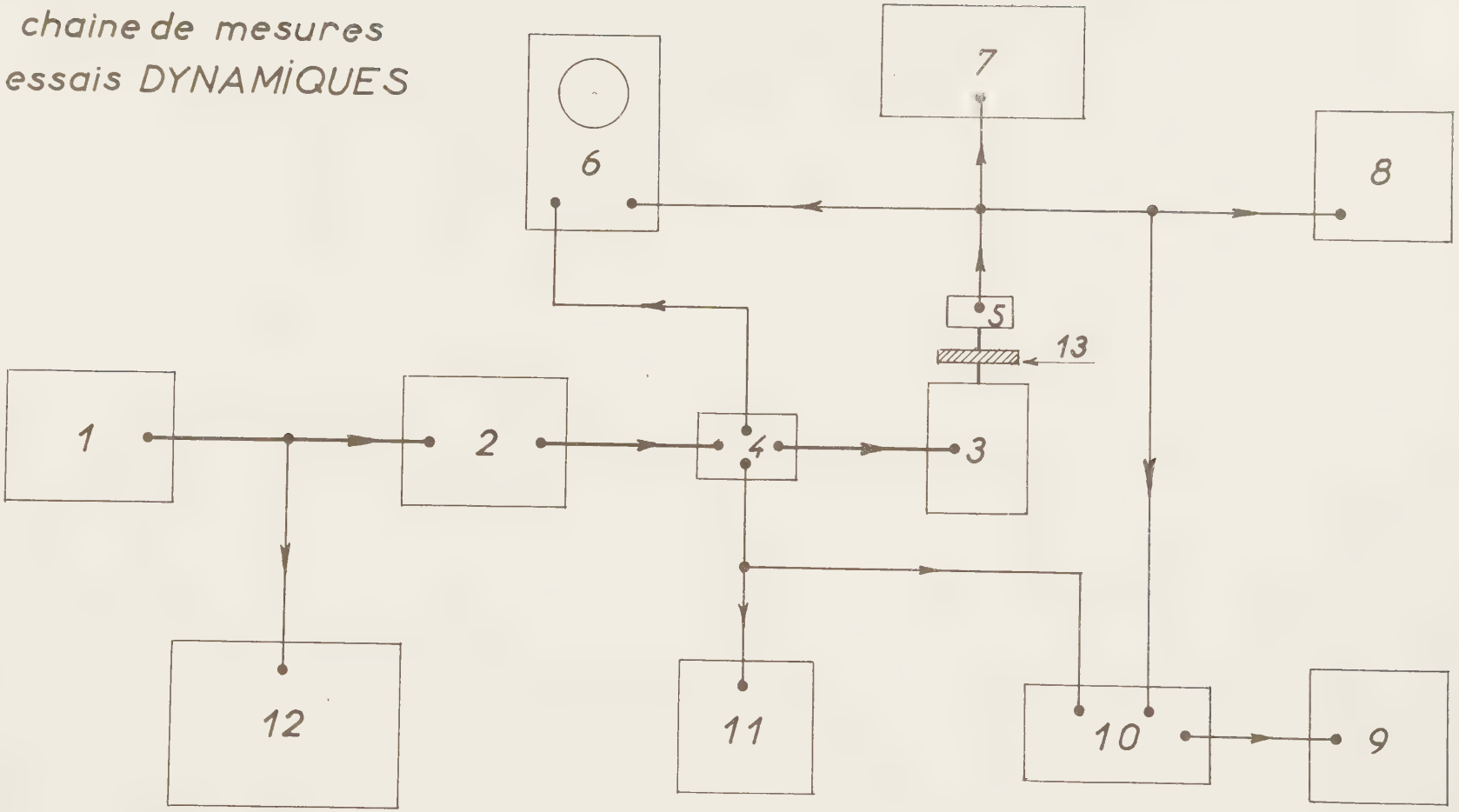


fig 6

1	Générateur	5	Capteur	9	Voltmetre Continu
2	Amplificateur	6	Oscilloscope	10	Multiplieur
3	EXcitateur	7	Enregistreur	11	Voltmetre
4	Résistance de Prélevement	8	Voltmetre	12	Frequencemetre
				13	Eprouvette

SCHEMA de montage des essais DYNAMIQUES

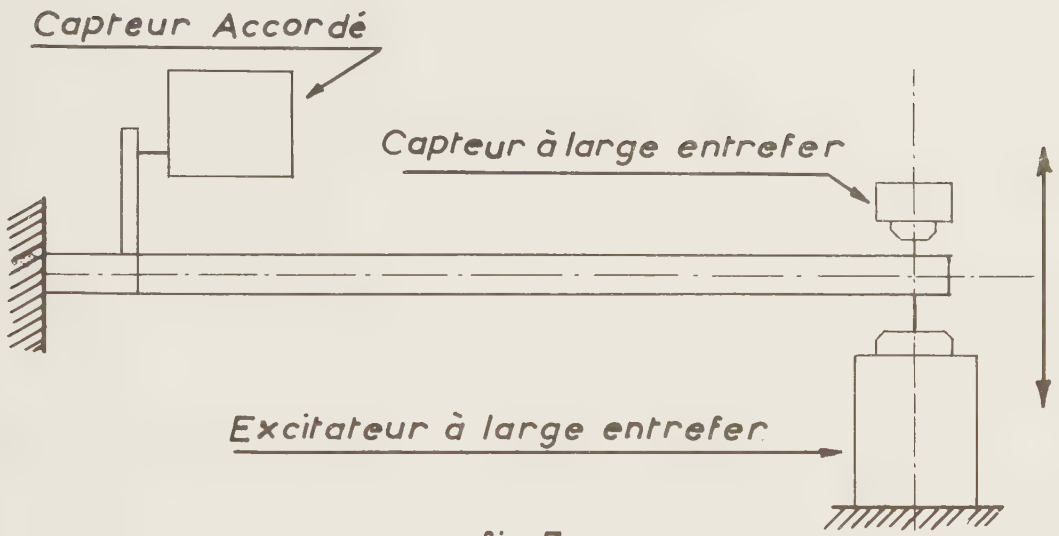


fig 7

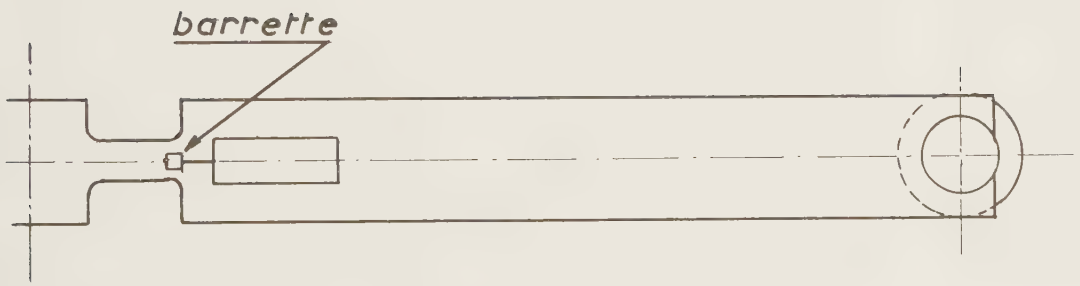


fig 8

Tableau I 1° série d'essais statiques

Cycle	|α| rad	ΔW th	ΔW exp	erreur	observations
1	14.10^{-3}	0,469	0,377	19,6 %	
2	$12,39.10^{-3}$	0,338	0,256	24,3 %	
3	$11,36.10^{-3}$	0,258	0,197	23,6 %	
4	$10,22.10^{-3}$	0,177	0,139	21 %	
5	$9,22.10^{-3}$	0,113	0,0976	13,6 %	
6	$8,28.10^{-3}$	0,0628	0,067	6,7 %	
7	$7,33.10^{-3}$	0,0235	0,0404		
8	$6,57.10^{-3}$	0,00451	0,0316		

_ Tableau II _ 2° serie d'essais statiques

Cycle	|α| rad	ΔW th	ΔW exp	erreur	observations
1'	$16,12.10^{-3}$	0,653	0,542	16,9 %	
2'	$14,23.10^{-3}$	0,489	0,411	15,9 %	
3'	$12,62.10^{-3}$	0,356	0,299	16 %	
4'	$11,19.10^{-3}$	0,246	0,227	7,7 %	
5'	$9,87.10^{-3}$	0,154	0,161	4,5 %	
6'	$8,77.10^{-3}$	0,088	0,108	22,7 %	
7'	$7,66.10^{-3}$	0,0355	0,0732		
8'	$6,77.10^{-3}$	0,0083	0,0448		

Tableau III Essais dynamiques

$\|a\|$ rad	ΔW th	f_o HZ	Pm	ΔWexp	erreur	observons
$2{,}05.10^{-3}$		56,75	0,0739	0,0013		
$4{,}07.10^{-3}$		56,63	0,489	0,00863		
$5{,}93.10^{-3}$		56,44	1,224	0,0217		
$6{,}57.10^{-3}$		56,29	1,674	0,0297		
$7{,}30\,10^{-3}$	0,0225	56,11	2,283	0,0407		
$7{,}97\,10^{-3}$	0,0484	55,81	3,219	0,0577	-19,21 %	
$9{,}26.10^{-3}$	0,116	55,18	5,618	0,102	+12,07 %	
$9{,}99.10^{-3}$	0,161	54,67	8,061	0,147	+8,7 %	
$10{,}42.10^{-3}$	0,1908	54,23	10,061	0,185	+3,04 %	
$10{,}86.10^{-3}$	0,222	53,92	12,071	0,224	-0,9 %	

Tableau IV Essais dynamiques

ω_o	Pm	Force	νexp	γ	ν th	erreur	observons
356,39	0,0739						f non mesuré
355,636	0,489	1,307	5,96 ‰	$2{,}10.10^{-3}$			
354,443	1,224	2,31	7,46 ‰	$2{,}99.10^{-3}$			
353,501	1,674	2,806	8,07 ‰	$3{,}37.10^{-3}$			
352,371	2,283	3,56	9,56 ‰	$3{,}64.10^{-3}$	5,29 ‰		
350,487	3,219	4,658	11,67 ‰	$3{,}94.10^{-3}$	9,80 ‰	19,08 %	
346,53	5,618	7,101	15,72 ‰	$4{,}71.10^{-3}$	16,80 ‰	+6,43 %	
343,328	8,061	9,449	19,57 ‰	$5{,}06.10^{-3}$	20,60 ‰	+ 5 %	
340,564	10,061	11,549	23,62 ‰	$5{,}12.10^{-3}$	23,5 ‰	-0,51 %	
338,618	12,071	13,553	27,27 ‰	$5{,}26.10^{-3}$	27 ‰	-1 %	

1ère Série d'essais statiques

Cycle N°7

Charge maxi 117,53N

Fig 9

1ère Série d'essais statiques

Cycle N°8

Charge maxi 107,72N

Fig 10

1ère Serie d'essais statiques

Cycle N°6

Charge maxi 127,35N

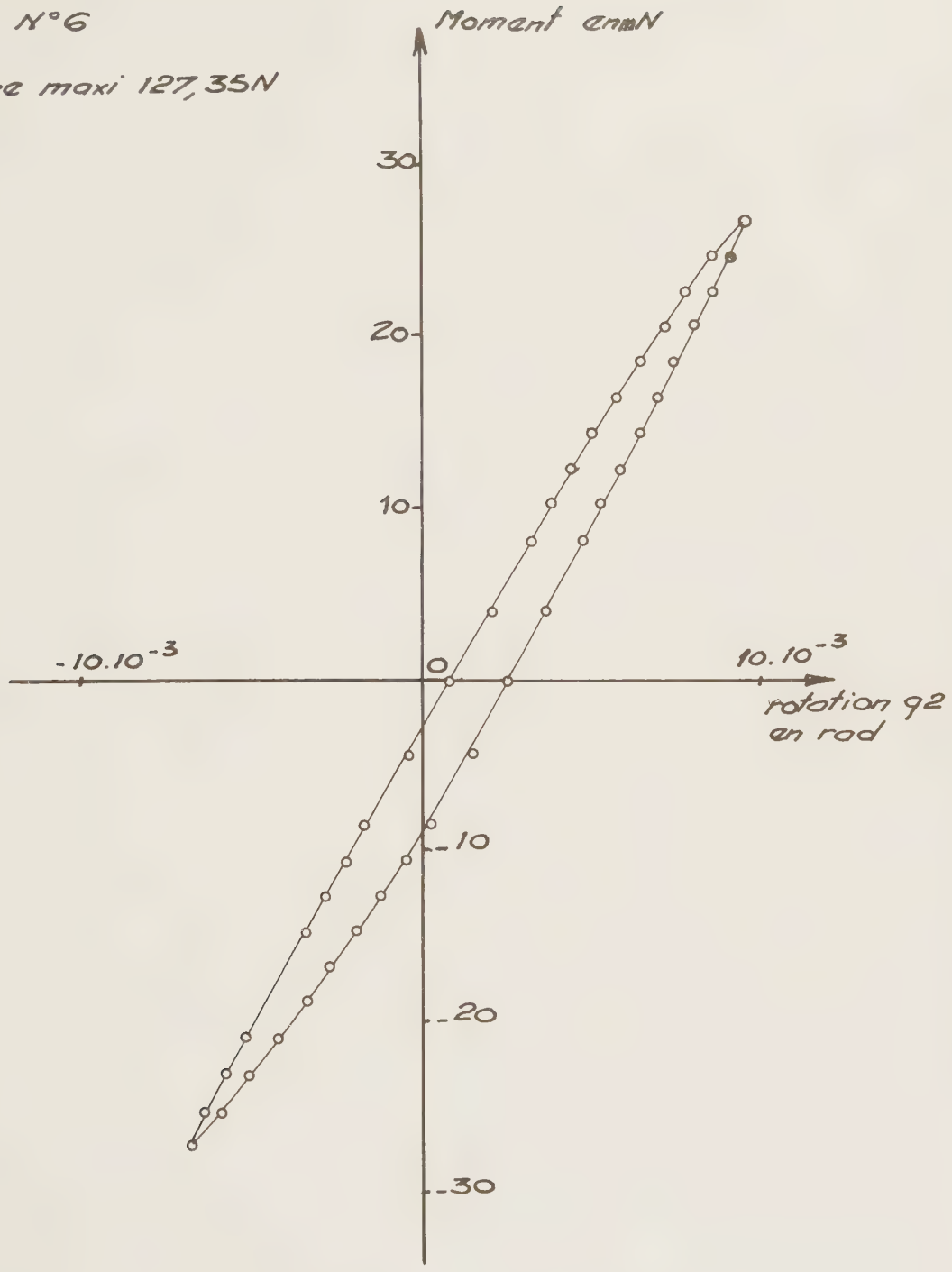


Fig 11

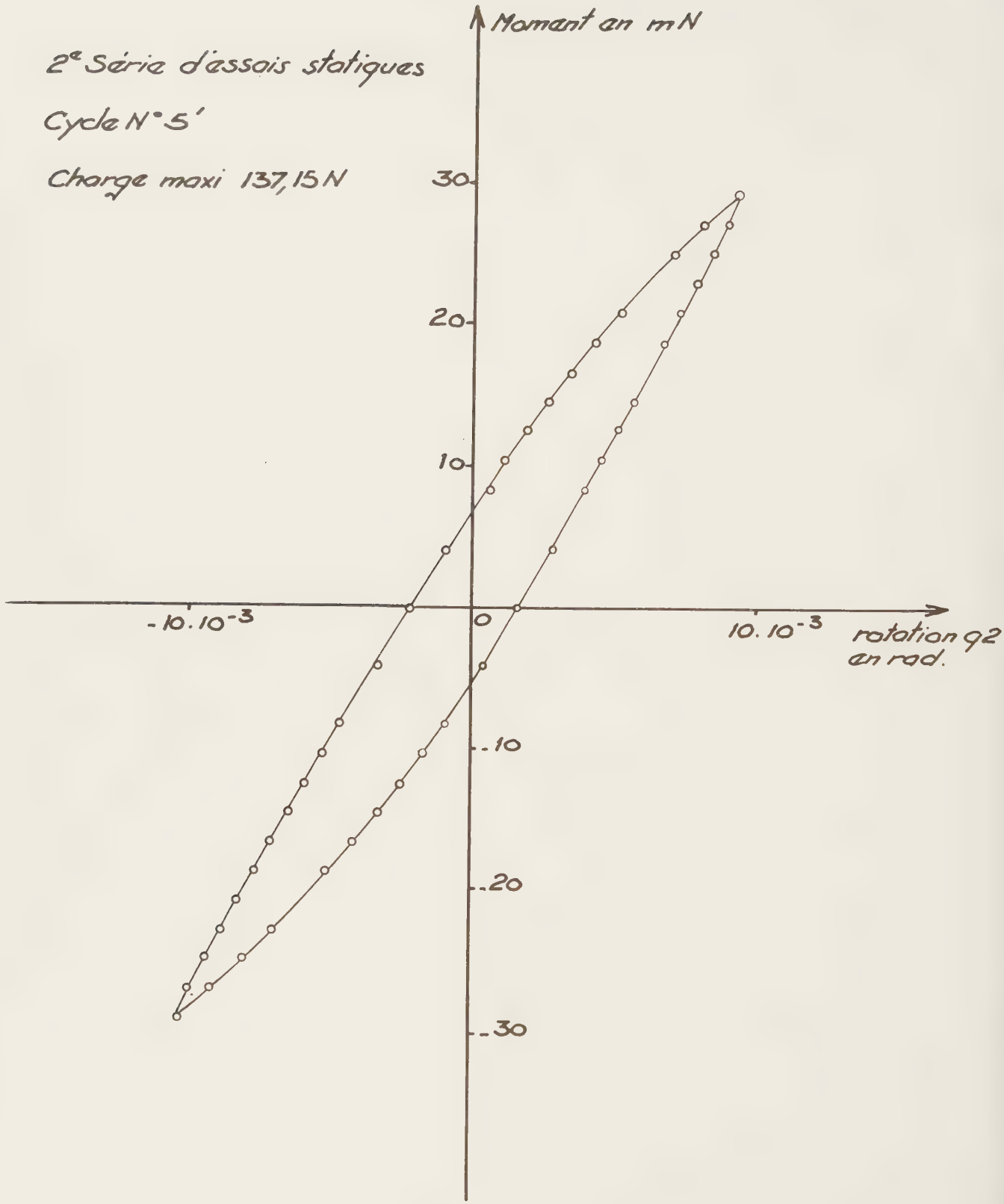

2e Série d'essais statiques
Cycle N°5'
Charge maxi 137,15 N
Moment en mN
30
20
10
-10
-20
-30
-10.10-3
0
10.10-3
rotation φ2
en rad.

Fig 12

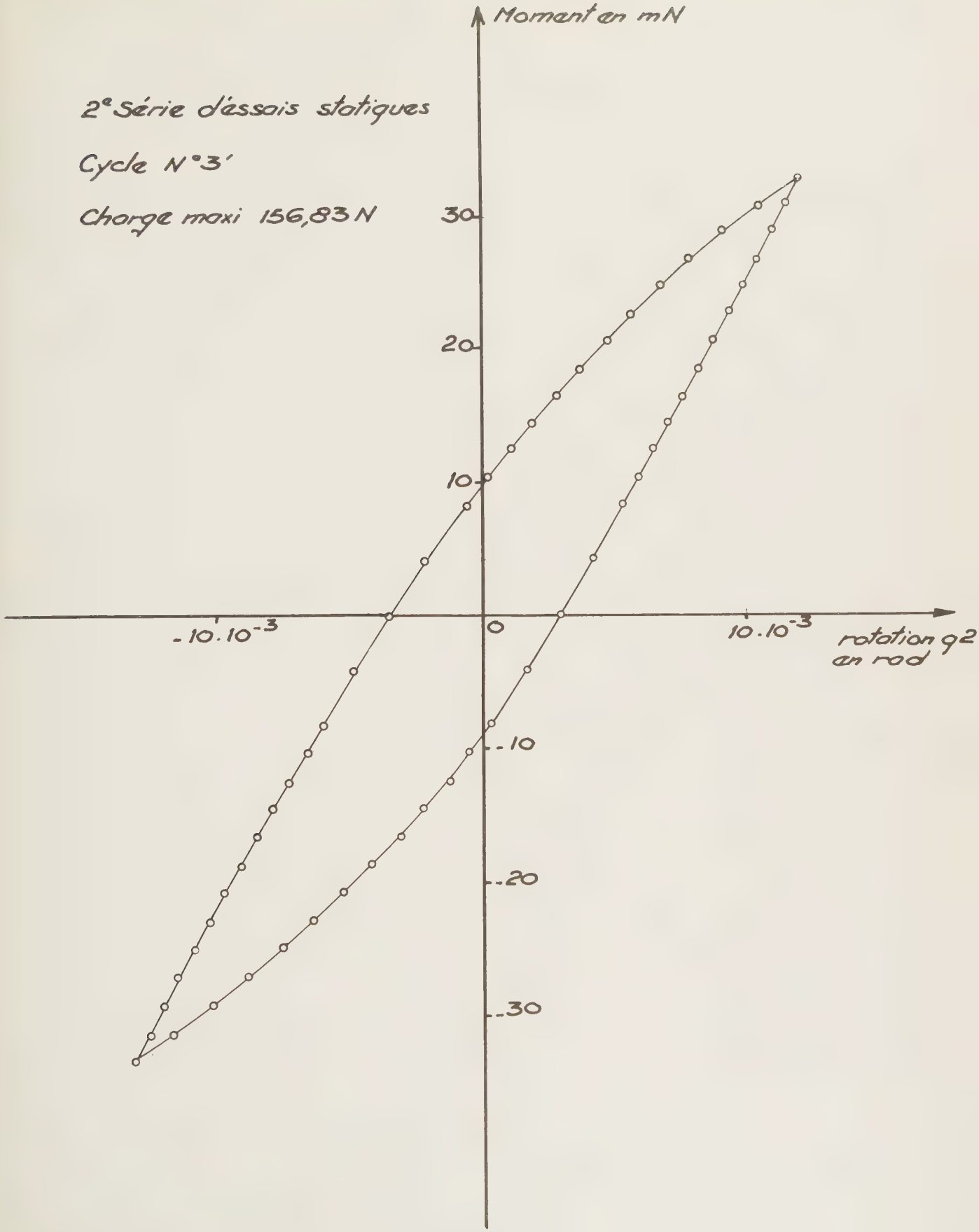

Moment en mN
2° Série d'essais statiques
Cycle N°3'
Charge maxi 156,83 N
30
20
10
-10
-20
-30
-10.10-3
0
10.10-3
rotation q2
en rad

Fig 13

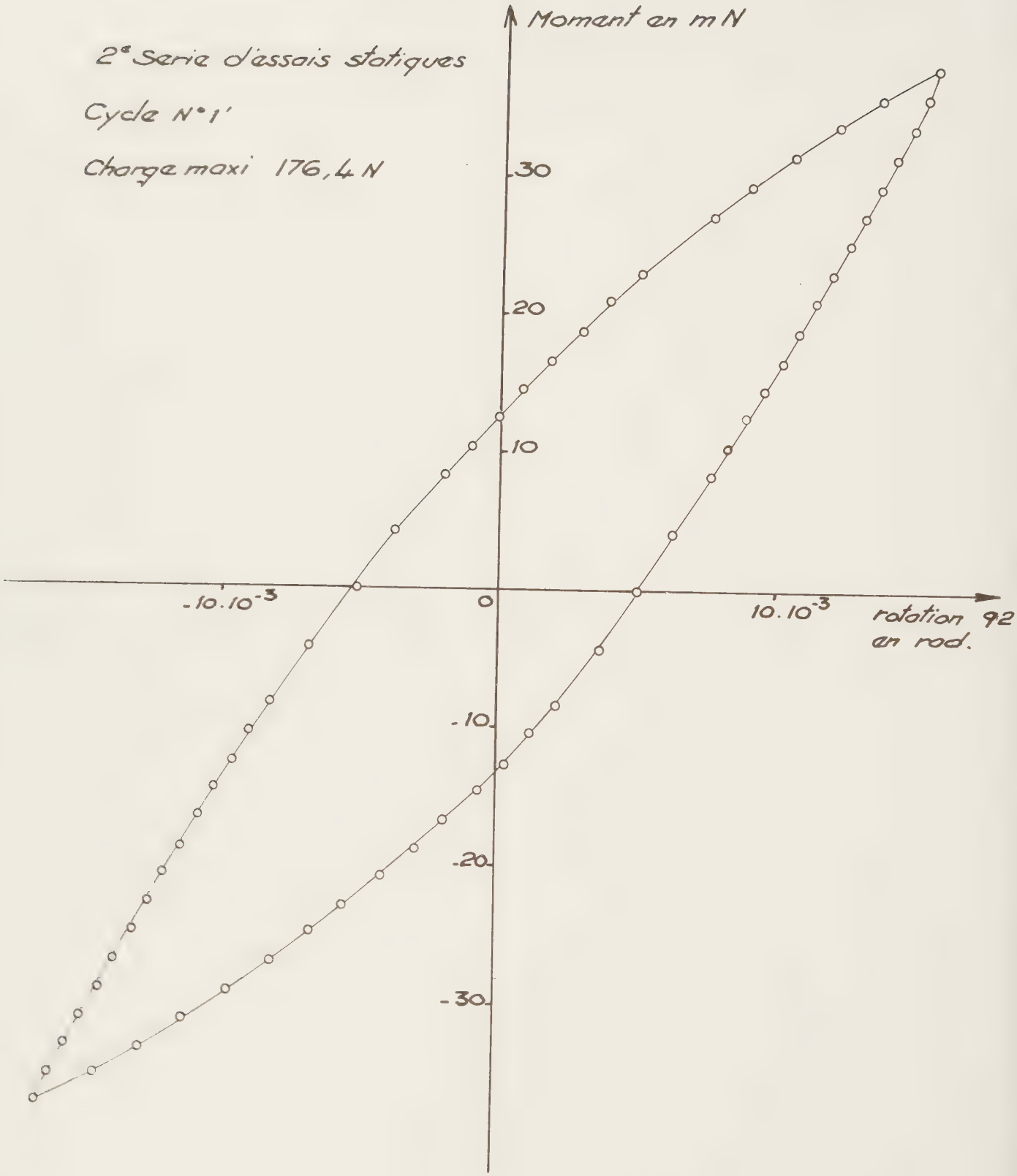

2e Serie d'essais statiques
Cycle N°1'
Charge maxi 176,4 N
Moment en m N
30
20
10
-10
-20
-30
-10.10-3
0
10.10-3
rotation 92
en rad.

Fig 14

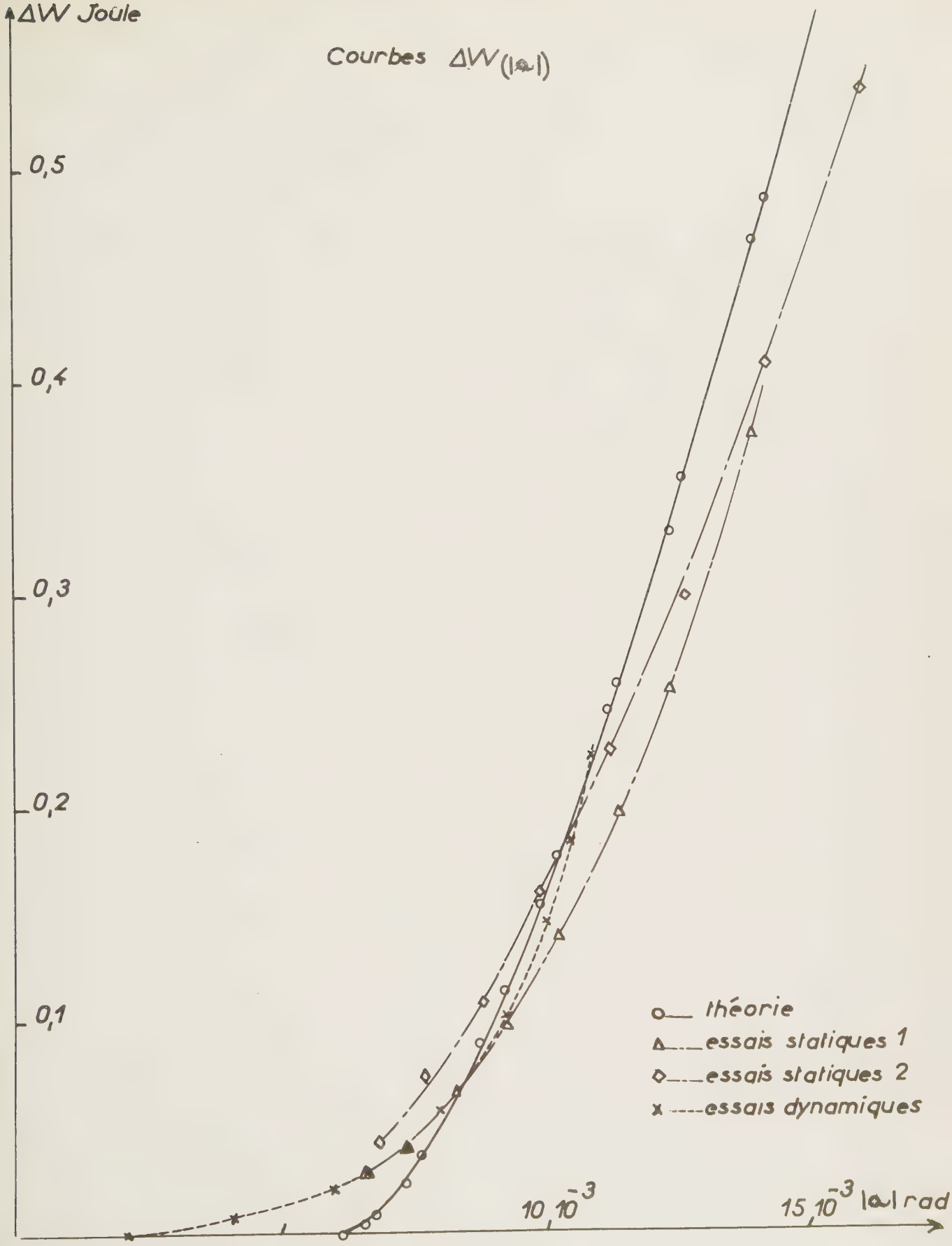
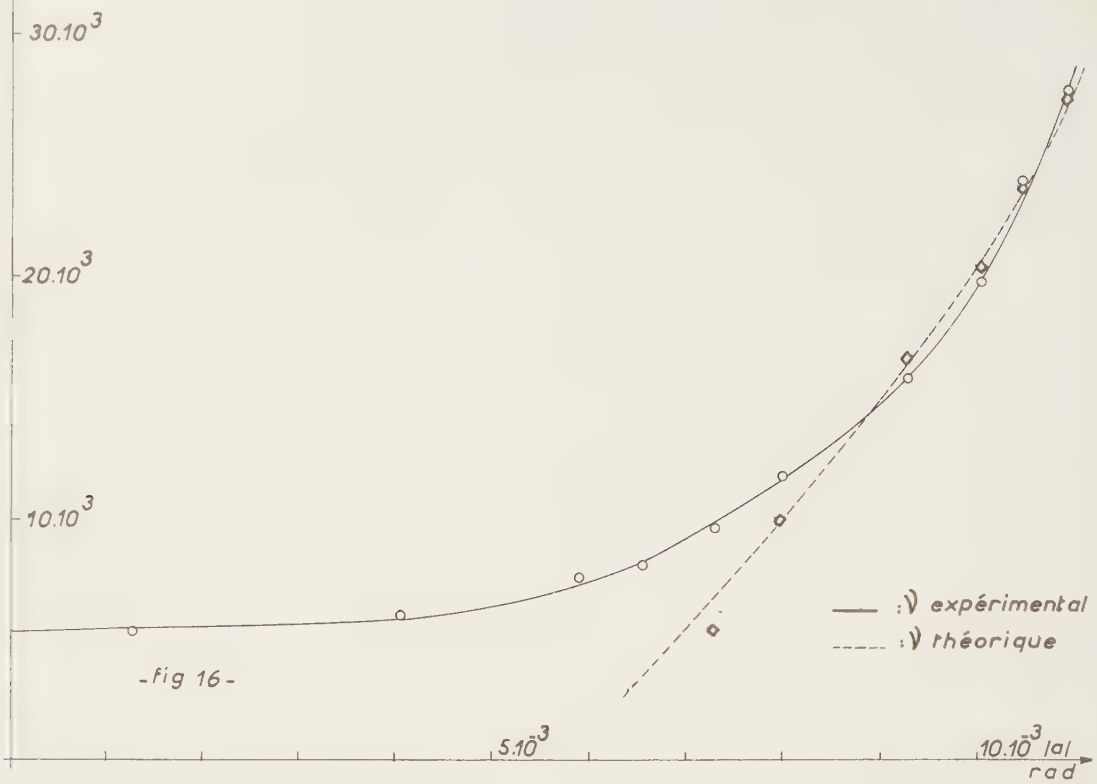
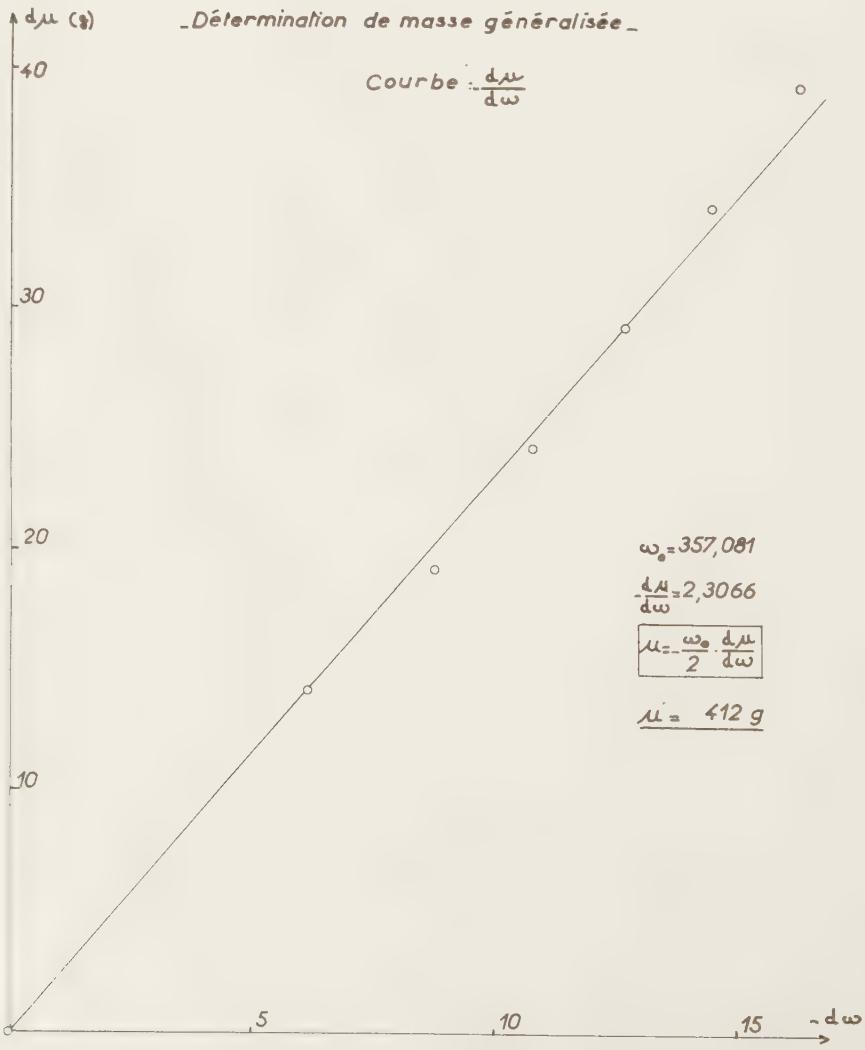

ΔW Joule
Courbes ΔW(|α|)
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
théorie
essais statiques 1
essais statiques 2
essais dynamiques
10 10⁻³
15 10⁻³ |α| rad

Fig 15

- Courbes $\mathcal{V}(|a|)$ -



-fig 16-



DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

SÉPARATION THERMIQUE DANS LES FLUIDES EN ROTATION

Vu et approuvé :

Paris, le 29 Mars 1966

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

Marc ZAMANSKY

Vu et permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

Jean ROCHE